COLBEDUCA
Colóquio Luso-Brasileiro de Educação
UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Universidade do Minho Instituto de Educação

Ensino das equações quadráticas: significados e representações semióticas

Teaching of quadratic equations: meanings and semiotic representations

Bruna Corso*

Adriano Luiz dos Santos Né**

Resumo

Este artigo apresenta alguns resultados de um trabalho de conclusão de curso de Licenciatura em Matemática que teve como objetivo lançar uma proposta de investigação no campo da Educação Matemática, particularmente no ensino de equações quadráticas. Fundamenta-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e no trabalho de Alessandro Jacques Ribeiro que fala sobre alguns significados atribuídos ao conceito de equações. Com base neste referencial teórico, criamos uma sequência de atividades e aplicamos em três turmas do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de Joinville (SC). As análises que apresentamos aqui mostram algumas das dificuldades que os alunos apresentaram em transitar entre os registros geométricos e os registros algébricos, e nos permitiram identificar de maneira pontual os significados que puderam atribuir ao conceito de equações quadráticas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino Fundamental. Equações Quadráticas. Significado.

Linha Temática: Educação Matemática

1 Ensino da álgebra: um panorama histórico

Podemos notar que no decorrer das leituras de trabalhos na área da Educação Matemática, alguns pesquisadores e educadores ainda problematizam o ensino da álgebra realizado de forma muito mecanizada e com uma linguagem de difícil compreensão aos alunos.

---

* Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), mestranda pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática (UFPR), bru_corso@hotmail.com

** Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (UFSC), professor assistente do Departamento de Matemática da UDESC (Joinville), adriano.ne@udesc.br.

De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), a maioria dos professores aborda o ensino da álgebra de maneira mecânica e automática, sem qualquer significado social e lógico com ênfase apenas na "memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões" (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 40).

Segundo Katia Gil, os tipos de atividades e as intervenções do professor nos processos de exploração das diferenças e dos significados dos objetos matemáticos, são decisivos para se obter um aprendizado efetivo. Estas atividades precisam dar oportunidade para que "[...] os alunos consigam se familiarizar com situações em que a Álgebra[1] assume as diferentes funções, tornando-se significativa para o aluno" (GIL, 2008, p. 46).

Diante disto, conhecer a trajetória histórica do ensino da álgebra nos oferece elementos para a compreensão que a mesma ocupa nos currículos escolares atualmente e nos permite ainda revelar aspectos que estão presentes até hoje no campo educacional.

Na pesquisa que realizamos (CORSO, 2015) pudemos notar, de uma forma mais geral, que houve três períodos históricos marcantes no ensino de matemática no Brasil, um momento anterior ao Movimento da Matemática Moderna (MMM), o próprio período do Movimento e o período que o sucedeu.

Antes do MMM a Geometria recebia certo destaque no currículo escolar brasileiro, por ser vista como rigorosamente racional era considerada um "[...] objeto para elevar o espírito" (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p.43) dos alunos, enquanto a Álgebra era considerada uma disciplina estritamente pragmática, a primeira ensinada nas escolas das altas classes sociais, "[...] uma vez que se acreditava ser ela responsável pelo 'desenvolvimento das

---

[1] Neste texto, utilizamos 'Álgebra' com letra maiúscula quando nos referimos a um campo de conhecimento científico historicamente consolidado, mas optamos a nos referir ao 'ensino de álgebra' com letra minúscula por não ver este último desta forma.

capacidades intelectuais', o que deveria ser privilégio da classe dirigente." (Ibidem, p. 45), e a segunda às classes populares.

Já com o MMM a Álgebra teve um lugar de destaque, principalmente pela exacerbada preocupação com o rigor matemático que as teorias de conjuntos, as estruturas algébricas e as relações traziam para a lógica matemática que se pretendia ensinar já nas escolas.

Por fim, por volta da década de 80, em virtude de um quase "esquecimento" do ensino de geometria, o que gerou discussões sobre o ensino de matemática no currículo brasileiro, o campo da Geometria volta a receber uma maior atenção em relação ao seu ensino.

Os pesquisadores Antônio Miguel, Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim apontam, ainda no início da década de 1990, um abandono que puderam identificar no ensino da álgebra, abandono este não no sentido de uma

> [...] ausência de informações algébricas mas ausência de reflexão crítica sobre esse ensino, isto é, a sua fossilização decorrente da não percepção da necessidade de renovação que pudesse imprimir-lhe novas direções e novas significações. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 40).

Desta maneira, podemos afirmar que neste período o ensino de álgebra não apresentava reflexões a cerca do seu real valor que pudesse fornecer aos alunos novos significados.

Com base neste breve panorama histórico, desenvolvemos uma pesquisa que se materializou num trabalho de graduação intitulado *Ensino das equações quadráticas: significados e representações semióticas*, que teve como objetivo criar, aplicar e analisar uma proposta de ensino para equações quadráticas que possibilitasse um processo de ensino que valorizasse os significados que as equações podem assumir em atividades matemáticas. E nesta comunicação científica traremos alguns dos resultados que obtemos.

2 Criação de uma sequência de atividades

A sequência de atividades que construímos a partir de nossa pesquisa consistiu num conjunto de fichas com problemas envolvendo o uso de equações quadráticas, mas para esta sequência buscamos primeiramente por referências que pudessem nos dar base para pensar os significados que o conceito de equação pode assumir e, em nossa busca, optamos pelos trabalhos do pesquisador Alessandro Jacques Ribeiro (2007, 2012), os quais apontam relações e potencialidades entre diferentes significados de equação e o conhecimento matemático para o ensino.

Este autor traz a classificação de seis categorias de significados para o conceito de equações, mas neste trabalho, pela limitação de espaço, levaremos em consideração dois destes significados que foram úteis para o desenvolvimento de nosso objetivo. Os quais discorremos a seguir.

Na primeira classificação apresentada por Ribeiro (2012), denominada de *intuitivo-pragmático*, o significado de equação está relacionado à resolução de problemas de ordem prática, que emerge de uma situação do cotidiano e pode ser tratada algebricamente, utilizando conhecimentos já adquiridos pelos indivíduos.

O segundo tipo de significado que uma equação pode assumir é denominado pelo pesquisador como *dedutivo-geométrico*, que relaciona noções ligadas a figuras geométricas, segmentos e curvas; por exemplo, exercícios que trabalham com a medida de lados de figuras geométricas e com interseções de curvas.

Entretanto, pelo conhecimento que já temos em sala de aula, sabíamos que não é uma tarefa fácil para os alunos da educação básica associar uma equação, ainda mais equações quadráticas, com situações cotidianas, ou mesmo com formas geométricas.

Esta característica da prática matemática de permitir mais de uma forma de se representar uma determinada situação, nos colocou a procura de uma base teórica que nos permitisse dar conta de propor uma prática em sala de aula que efetivamente colocasse os estudantes em condições de reconhecer estes dois significados propostos por Ribeiro (2007), ora transitando entre equações e situações práticas, ora entre equações e entes geométricos.

E em nosso percurso optamos pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval, tem como finalidade demonstrar a importância de reconhecer os vários registros de representação no processo de aprendizagem.

Para que possamos falar sobre esta teoria no espaço que nos é disponibilizado aqui, começaremos apontando para duas atividades cognitivas que Duval diferencia e é base importante para entender parte de sua teoria.

Se observarmos a resolução da equação quadrática da Figura 1 através do uso da fórmula de Bháskara, identificamos o que Duval denomina de uma atividade de *tratamento*. Isso porque toda esta prática matemática foi realizada num mesmo registro de representação, neste caso, toda a resolução da equação foi feita no registro algébrico.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

Figura 1. Resolução de uma equação quadrática, acervo da pesquisa.

Quando a atividade matemática demanda a transformação entre registros de representação diferentes, ou seja, quando existe "mudança de sistema de representação e em referência a um mesmo objeto matemático" (MORETTI, 2002, p. 350), Duval classifica esta atividade como uma *conversão*. Esta operação não é tão “algoritmizável” quanto à de tratamento, pois precisa seguir certos procedimentos metodológicos que estabelecem relações entre unidades significantes de cada registro (DIONIZIO; BRANDT, 2012).

Uma atividade de conversão citada por Moretti (2002), e que pode nos dar um maior entendimento destas unidades significativas, é a representação no plano cartesiano de funções do tipo $y=ax+b$. A função $y=2x+1$, por exemplo, tem sua representação geométrica como indico na Figura 2.

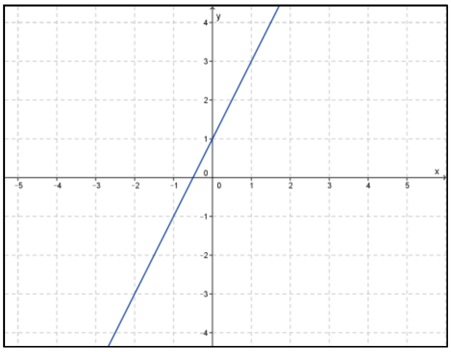


Figura 2, representação gráfica da equação $y=2x+1$, acervo da pesquisa.

Perceba que, ao realizar esta operação, passamos de um registro semiótico algébrico para um registro gráfico de um mesmo objeto matemático. E para transitar entre estes registros é preciso estabelecer relações, por exemplo, entre o coeficiente a na representação algébrica e a inclinação, crescente ou decrescente, da reta que representa o objeto no registro gráfico; também é necessário estabelecer uma relação entre o coeficiente b e a altura em que a linha da representação gráfica intercepta o eixo das ordenadas.

Então, na atividade de conversão não há um algoritmo muito bem definido como em um tratamento, mas o estabelecimento de relações entre unidades que são significativas em cada registro, elementos que influenciam o objeto matemático em cada um de seus registros semióticos.

Uma vez apresentado estes aspectos da TRRS é possível reconhecermos como acontece a compreensão em matemática segundo Duval, ou seja, como podemos identificar o aprendizado segundo esta teoria.

> A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão (DUVAL, 1993[2], p. 51 apud MORETTI, 2002, p. 349).

Desta forma, segundo a TRRS a compreensão em matemática passa pelo conhecimento de ao menos dois registros de representação e a mobilização entre estes registros.

De acordo com Guadagnini (2013), para Duval não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por um indivíduo sem um sistema de representação que esteja intrinsecamente ligado a concepções prévias. Aquela autora enfatiza ainda que

> [...] devemos considerar que os objetos matemáticos não são perceptíveis ou mesmo observáveis com a ajuda de instrumentos, seu acesso passa impreterivelmente por representações semióticas. Como os alunos, de modo geral, não conseguem perceber o mesmo objeto matemático em diferentes representações, isto se torna um fator limitante para sua apreensão. Daí a importância de criar condições para que o aluno reconheça um mesmo objeto matemático em várias representações, promovendo uma apreensão mais significativa dos conceitos matemáticos (GUADAGNINI, 2013, p. 58).

Portanto, pareceu-nos evidente uma articulação entre os significados propostos por Ribeiro e o trabalho de Duval. Pois o primeiro sugere não limitar o conceito de equação a um só uso, um aprendizado significativo se daria quando os alunos reconhecem seus usos em situações distintas. E a TRRS aponta para a necessidade de reconhecer o objeto matemático em ao menos dois registros semióticos de representação e coordená-los, com isso, permitindo que os estudantes não confundam o objeto matemático com sua representação. Na próxima seção apresentaremos a trilha metodológica que organizamos para realização de nosso trabalho empírico.

---

[2] Duval, R. **Registres de représentation sémiotique e fonctionnement cognitif da la pensée**. Annales de didactique et de sciences cognitives, v.5, 1993.

3 Uma organização metodológica

A investigação aconteceu em uma escola municipal da cidade de Joinville (SC) em três turmas de nono ano, no período vespertino. A média de estudantes por sala era de 28 alunos. A aplicação da sequência de atividades levou dois encontros, um de uma aula e outro de duas aulas seguidas, ou *aulas-faixa*. E a autora deste trabalho, antes de realizar a atividade, observou duas aulas de matemática para conhecer melhor a turma.

A sequência de atividades elaborada foi dividida em 11 fichas contendo exercícios extraídos e adaptados – segundo os referenciais apresentados na seção anterior – de livros didáticos[3]. Tínhamos, no entanto, a noção de que não, necessariamente, iríamos conseguir trabalhar todas as fichas com as turmas da pesquisa. Nossa intenção, ao criar 11 fichas, foi de que, caso os alunos tivessem um bom desenvolvimento, não lhes faltassem atividades.

Ao invés de entregar uma grande lista de exercícios aos alunos, o que poderia parecer mais uma tarefa cotidiana, optamos por apresentar uma dinâmica diferente em sala de aula, introduzindo fichas com atividades. Cada dupla resolvia, por exemplo, a Ficha 1, depois recebia a Ficha 2 e assim sucessivamente conforme o seu desempenho na atividade. Desta forma, a preocupação dos alunos não seria resolver toda uma lista de exercícios em um determinado intervalo de tempo, mas de se concentrar em cada etapa do trabalho.

Um dos intuitos de se trabalhar utilizando essas fichas também foi proporcionar ao aluno momentos de reflexão sobre o que estão desenvolvendo, uma vez que os próprios alunos, em alguns casos, descobrem e corrigem os seus erros o que pode proporcionar uma aprendizagem significativa. A proposta de dividir os alunos em duplas nesta atividade era favorecer a socialização, além de um ajudar o outro a vencer os desafios matemáticos com que se deparavam.

[3] Estas fichas estão disponíveis em Corso (2015).

Outro ponto positivo ao propor o trabalho com fichas é que o papel do professor, nesta etapa do trabalho, muda. Segundo Onuchic e Allevato (2008), o professor passa de comunicador do conhecimento para um mediador, incentivador do conhecimento. Desse modo, “[...] o professor, ao fazer a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários” (p. 83).

Partimos da concepção de que a coordenação de registros semióticos diferentes de um mesmo objeto matemático não é algo elementar para os estudantes e, com isso, na primeira aula de matemática da aplicação a autora deste trabalho fez uma revisão do cálculo de áreas de figuras geométricas como o quadrado, retângulo e o triângulo, entretanto, a sua forma de proceder tentou valorizar a conversão entre as representações algébricas e geométricas nos dois sentidos.

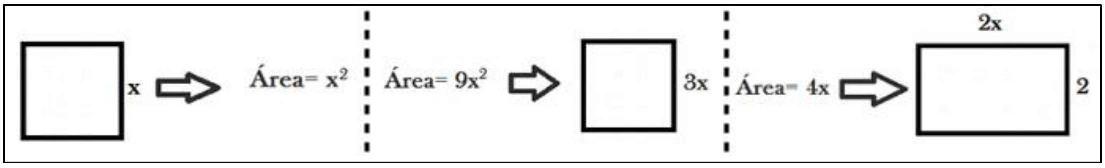


Figura 3, representações do conceito de áreas, acervo da pesquisa.

Como mostramos na Figura 3, a intenção era colocar o estudante em situações em que pudessem reconhecer o conceito de área nas representações geométrica e algébrica e que fossem capazes de transitar entre uma e outra.

Particularmente a representação dos lados do retângulo $2x$ e 2, da terceira parte da Figura 3, foi a resposta de uma aluna que nos trouxe certa surpresa, pois, quando propomos $4x$ como área, pensávamos que a resposta seria os lados respectivamente 4 e x.

4 Aplicação da atividade

A primeira ficha que foi proposta as turmas apresentava uma situação que envolvia um quadrado de lados 3 unidades de comprimento e quatro retângulos de dimensões 3 por 1 unidades de comprimento. Os alunos viam um exemplo de como configurar estas peças de maneira a se aproximarem da forma de resolução de equações quadráticas atribuídas ao matemático árabe Al-Khowarizmi (Figura 4).

Este matemático muçulmano do século 8º d.C., resolvia equações quadráticas utilizando a técnica de completar quadrados. Al-Khowarizmi resolvia as equações de forma retórica, mas, para justificar a exatidão de suas regras, empregava o método geométrico. (PAULA; LOPES; OLIVEIRA, 2011).

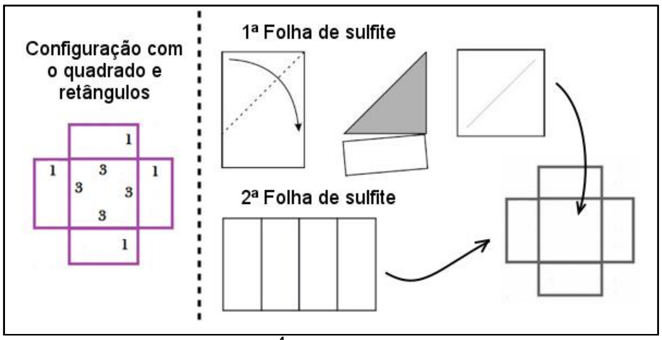
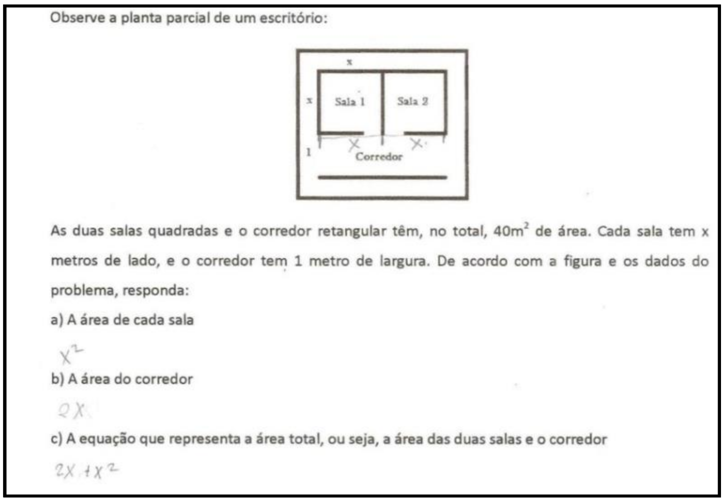


Figura 4, dobraduras[4], recortes e configurações, acervo da pesquisa.

Então, nesta primeira atividade tratava-se dos alunos reconhecerem como configurar as formas geométricas para então poder fazer uma relação com uma representação algébrica. O que foi feito quando a autora desta pesquisa utilizou esta forma de proceder, associada a algumas dobraduras e recortes de folhas de sulfite (Figura 4), para resolver a equação $x^2+16x=17$.

Já em relação ao sentido contrário da conversão, do registro geométrico para o registro algébrico, pudemos perceber que os estudantes até conseguiam converter um quadrado ou retângulo em uma expressão algébrica, mas relacionar os dados obtido à uma equação quadrática ainda era algo que não compreendiam. Como podemos verificar na resolução apresentada por um aluno na Figura 5.

[4] A imagem da dobradura foi retirada de **Dobrando Origami**: Seguindo por onde o papel nos levar. (Blog). Disponível em: <https://desdobrandoorigami.wordpress.com/tag/origami/page/2/>. Acesso em 02/07/2016.


Observe a planta parcial de um escritório:

As duas salas quadradas e o corredor retangular têm, no total, $40m^2$ de área. Cada sala tem x metros de lado, e o corredor tem 1 metro de largura. De acordo com a figura e os dados do problema, responda:

a) A área de cada sala

x^2

b) A área do corredor

$2x$

c) A equação que representa a área total, ou seja, a área das duas salas e o corredor

$2x + x^2$

Figura 5, Resolução de um aluno na Ficha 3, acervo da pesquisa.

5 Algumas análises e considerações

Primeiramente mencionamos que a maneira que procedemos em sala de aula permitiu a experimentação de uma prática docente que valorizava a reflexão, isso porque ao partirmos de uma teoria que nos deu base para pensar o significado de um objeto matemático, no caso as equações, encontramos um direcionamento de como proceder que não se limitasse a uma série de tratamentos algébricos mecânicos que parecem ter deixado um rastro muito forte no ensino de álgebra do Brasil.

E a forma que nos distanciamos desta característica aconteceu no momento em que buscamos por significados distintos para as equações quadráticas e não por técnicas de resolução, também vemos este distanciamento quando nos interessamos em colocar os estudantes em situações que demandavam a coordenação de mais de um registro de representação semiótico ao invés de fazê-los dominarem tratamentos algébricos específicos.

Encontramos bons resultados durante a aplicação da sequência de atividades que materializamos em nossa investigação, como podemos perceber com as resoluções expostas na Figura 6. Nelas os alunos perceberam que em um determinado problema, às vezes, não existe apenas uma única forma de resolvêlo, nesta atividade fica evidente o papel que desempenham as diferentes formas de representar um mesmo objeto matemático, pois são elas que aumentam a capacidade dos estudantes na resolução de problemas (MORETTI, 2002).

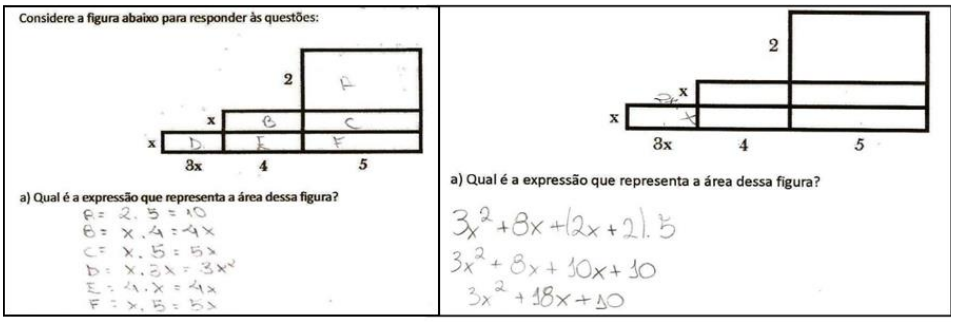


Figura 6, Resolução de dois alunos na Ficha 5, acervo da pesquisa.

Porém, o que mais nos chama atenção quando uma prática docente encontra uma base teórica para direcioná-la, é a possibilidade de realizar uma avaliação mais refinada da turma, no sentido de classificar as dificuldades encontradas segundo esta teoria e, com isso, realizar outras intervenções em sala que possibilitem superar tais dificuldades pontualmente. Pois uma característica do trabalho do professor é a constante reformulação de suas ações.

A visão de que o professor é um "técnico" que aplica práticas legitimadas pela academia já é amplamente debatida e criticada. E pensamos que iniciativas como a que apresentamos neste trabalho, relacionando reflexão sobre as ações docentes tomando como base alguns elementos teóricos, são importantes para produzir outros efeitos para o ensino de matemática no Brasil.

Referências

CORSO, Bruna. **Ensino das equações quadráticas**: significados e representações semióticas. 2015. 69 f. Trabalho de Graduação (Licenciatura em Matemática). Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville (SC), 2015.

DIONIZIO, Fátima A. Q.; BRANDT, Célia F. O caminho percorrido pela semiótica e a importância dos registros de representação semiótica para a aprendizagem da matemática. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 9. Caxias do Sul, RS. **Anais**... Caxias do Sul: PPGE/UCS, 2012. Disponível em:

<http://www.portalanpedsul.com.br/admin/uploads/2012/Ensino_de_Matematica_e_ciencias/Trabalho/12_54_15_2866-6636-1-PB.pdf>. Acesso em: maio 2015.

GUADAGNINI, Míriam R. **O uso da fatoração na resolução de equações do 2° grau por alunos do 9°ano do ensino fundamental.** 2013. Dissertação (Pós-Graduação em Educação Matemática) – UFMS. Campo Grande, MS, 2013.

GIL, Katia H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. 2008. 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

MIGUEL, Antonio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Â. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, v. 3, n. 1, p. 39-54, 1992.

MORETTI, Méricles T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de Matemática. **Contrapontos**, Itajaí, ano 2, n. 6, p. 423-437, set./dez. 2002.

ONUCHIC, Lourdes R.; ALLEVATO, Norma Suely Gome. As diferentes “Personalidades” do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Bolema**, Rio Claro, SP, ano 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

PAULA, Caio C. P. de; LOPES, Juracélio F.; OLIVEIRA, Davidson P. A. Resoluções de equação do 2° grau: método do passado com tecnologia do presente. **Revista da Educação Matemática da UFOP**, v. I, 2011. Disponível em: <http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/view/344/301>. Acesso em: abr. 2015.

RIBEIRO, Alessandro J. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 26, n. 42B, p. 535-557, abr. 2012.

______. **Equação e seus multisignificados no ensino de matemática**: contribuições de um estudo epistemológico. 2007. 142 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.