Aplicações de derivadas e resolução de problemas

Derivative applications and problem solving

Eliane Bihuna de Azevedo[1]

Elisandra Bar de Figueiredo [2]

Pedro Manuel Baptista Palhares[3]

Resumo

Esse texto tem por finalidade relatar um experimento sobre a interpretação cinemática e a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto mediada pela metodologia de Resolução de Problemas (RP). Esse experimento foi utilizado para introduzir o assunto de derivadas em duas turmas de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI1) de uma Universidade Pública. A metodologia de pesquisa utilizada foi qualitativa e os dados foram coletados por meio da observação participante e análise documental. Como resultado preliminar desta pesquisa, observamos que, por parte dos estudantes, houve uma diferenciação entre a derivada de uma função e coeficiente angular da reta tangente. Essas atividades possibilitaram um contato inicial de parte dos pesquisadores com a RP como metodologia de ensino e possibilitou a investigação da aceitação dessa metodologia pelos discentes. Por fim, esta experiência auxiliará no planejamento de ações futuras, visando o objetivo da pesquisa de doutoramento ao qual esse trabalho está vinculado.

Palavras-chave: Cálculo diferencial e integral, Interpretação cinemática e geométrica da derivada, Metodologia de Resolução de Problemas.

Linha Temática: Educação Matemática.

1 Introdução

Esse trabalho faz parte de uma pesquisa de doutoramento que tem por objetivo desenvolver estratégias para trabalhar com conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) mediados pela metodologia de Resolução de Problemas (RP). A experiência aqui relatada foi desenvolvida em duas turmas regulares da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI1) dos iniciantes dos cursos de Licenciatura em Física e Ciência da Computação de uma Instituição de

[1] Doutoranda, professora da UDESC/Joinville, eliane.bihuna@gmail.com
[2] Doutora, professora da UDESC/Joinville e do PROFMAT, elis.b.figueiredo@gmail.com
[3] Doutor, professor do IE/UMinho, palhares@ie.uminho.pt

Ensino Superior brasileira e pública no primeiro semestre letivo de 2016. Nesse período foram realizados alguns experimentos tendo a Resolução de Problemas (RP) como metodologia de ensino. Dentre essas atividades desenvolvidas, uma delas teve por finalidade introduzir por meio das interpretações cinemática e geométrica o conteúdo de derivada de uma função em um ponto. A professora responsável pelas referidas turmas atuou como pesquisadora e observadora. Dessa forma, a docente teve a oportunidade de sentir a aceitação, por parte da turma, de uma nova proposta metodológica, visto que a metodologia de suas aulas sempre era do estilo tradicional e dialogada.

Esse texto está organizado da seguinte forma: inicialmente apresenta-se a justificativa da pesquisa e do experimento; uma breve revisão da metodologia de RP; o experimento com a descrição de desenvolvimento das atividades por parte dos alunos e da professora; e, as considerações finais.

2 Justificativa

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é uma importante disciplina dos cursos de Ciências Exatas e Engenharia devido a sua aplicabilidade. Apesar dessa importância, em nível universitário, CDI é uma disciplina que possui índices de reprovação muito elevados em diversas Instituições de Ensino, tais como a Universidade de São Paulo, na Universidade Federal Fluminense e Universidade do Estado de Santa Catarina (PAGANI; ALLEVATO, 2015; ZUCHI, 2005; FIGUEIREDO, et al 2014).

Alguns professores e pesquisadores acreditam que muitas das dificuldades que os estudantes têm na disciplina de CDI1 pode ser oriunda de uma precária formação em matemática do Ensino Básico (RAFAEL; ESCHER, 2015; FIGUEIREDO, et al 2014) e serem provocadas pela diferença entre os conteúdos trabalhados no Ensino Médio em comparação com aquilo que é exigido dos alunos na Universidade (MENESTRINA; GOUDARD, 2003). De acordo com Rafael e Escher (2015, p.11), “temas como metodologia, diferença entre cursos e até mesmo dificuldades referentes a maturidade necessária para a real compreensão do que é o Cálculo fazem parte da discussão". Nesse contexto, essas dificuldades apresentadas por estudantes de CDI instigam diversos professores-pesquisadores, preocupados com esse cenário, a desenvolverem pesquisas sobre metodologias diferenciadas almejando encontrar formas/alternativas que sejam capazes de despertar maior interesse por parte dos estudantes, fazendo com que esses participem mais ativamente no processo de aprendizagem. Para que tais metodologias possam ser inseridas no contexto de sala de aula, o professor deve estar disposto a mudanças em sua prática docente, pois ele deve assumir um papel de mediador do conteúdo e não de um mero transmissor de conhecimentos (ABDELMALACK, 2011; NOGUTI, 2014). Dentre as diversas metodologias de ensino que podem ser introduzidas na sala de aula uma delas é a RP (POLYA, 2006; ONUCHIC, et al 2014; ABDELMALACK, 2011; NOGUTI, 2014).

Os autores desse texto, que lecionam a disciplina de CDI1, corroboram com Gonçalves e Reis (2011) quando esses afirmam, baseados em suas práticas docentes, que muitos alunos que já cursaram CDI são capazes de encontrar a derivada de uma função, mas o fazem de forma mecânica, muitos quando questionados sobre o significado da solução, não sabem responder. Isso ocorre porque aprenderam a resolver por meio de regras, por um roteiro a ser seguido, mas, de fato, não compreenderam os conceitos. Pela experiência docente em CDI1, ainda com relação ao conteúdo de derivadas, outro problema constatado com frequência é que muitos estudantes confundem a interpretação geométrica da derivada. Esses alunos consideram que o coeficiente angular da reta tangente em um ponto é igual à derivada da função que a reta está tangenciando, esquecendo que o coeficiente angular é um número e não uma função. Devido a esse problema conceitual, o professor encontra, por exemplo, a função $\boldsymbol{y = 2x^2 - 2x + 1}$ como sendo a equação de uma tangente ao gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ no ponto $\boldsymbol{P(1, 1)}$. Quando o aluno apresenta um resultado como este é porque usou a equação geral da reta $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$, considerando que o coeficiente angular é $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2x}$ e $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{1}$. Situações absurdas como essa nos motivaram a inovar as próprias aulas de CDI1. Para tanto, estamos nos dedicando ao estudo da metodologia de RP e sua inserção na sala de aula para introduzir alguns conteúdos da disciplina de CDI1. Na sessão 4 relatamos a experiência aplicada para introduzir o conteúdo de derivadas mediado pela metodologia RP. Na sequência, será abordada a metodologia de RP.

3 Resolução de problemas como metodologia de ensino

No transcorrer do tempo surgiram várias concepções diferentes sobre a forma de abordar a RP em sala de aula. O documento intitulado “An Agenda for Action” (Uma Agenda para Ação), publicado na década de 80 pela entidade norte-americana National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), dizia que a RP deveria ser o foco na matemática escolar e recomendava que os professores de Matemática criassem situações em que a RP pudesse desabrochar em suas salas de aula (NOGUTI, 2014). E, de acordo com Abdelmalack (2010) nessa época (década de 80) eram identificadas três formas de conceber a RP, que consistiam em trabalhar para, sobre ou através da RP.

No Brasil, a RP como estratégia de ensino e aprendizagem teve origem por meados do século XX, após a publicação do livro, traduzido para o português, como “A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático” de George Polya (1945). Polya é considerado por muitos como sendo o pioneiro no estudo de RP como metodologia de ensino. Em seu livro, buscou ensinar estratégias que levassem o aluno a ser um bom resolvedor de problemas. Para tanto, o método de Polya consiste em dividir a resolução de um problema em quatro etapas, que são: compreensão do problema, construção de um plano de resolução, execução do plano e revisão da solução (POLYA, 2006).

O Grupo de Trabalho e Estudo sobre Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela professora Lourdes de la Rosa Onuchic, na UNESP de Rio

Claro, busca incessantemente desenvolver estudos que efetivamente atinjam a sala de aula, ou seja, que estejam relacionados com questões de ensino-aprendizagem-avaliação tanto sob a perspectiva do aluno quanto do professor. O GTERP faz uso de um roteiro de atividades, para ensinar através da RP, destinado à orientação de professores para a condução de suas aulas: preparação do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, busca de consenso e formalização do conteúdo (ONUCHIC, 2013).

De acordo com Onuchic (2013) não é fácil para o professor fazer uso de RP como metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação, pois as atividades a serem propostas devem ser cuidadosamente escolhidas para atingir o objetivo almejado. Nas aulas o professor deve sempre incentivar/encorajar seus os alunos a resolverem os problemas. Nesse mesmo artigo, a autora afirma que “professor e alunos, depois dessa experiência [inserção da metodologia de RP na sala de aula], não querem voltar a trabalhar com o método tradicional” (ONUCHIC, 2013, p.103). Essa frase contribuiu para instigar a curiosidade sobre o assunto e motivou o tema da pesquisa de doutoramento ao qual esse trabalho está associado.

Documentos oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998), tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio (2002), orientam o professor a utilizar problemas para conduzir a formação dos conceitos antes de introduzir a linguagem matemática em sala de aula. Como os cursos de graduação envolvidos na experimentação a ser relatada são Licenciatura em Física (LEF) e Bacharelado em Ciência da Computação (BCC), buscamos analisar o Projeto Político Pedagógico (PPP) desses cursos a fim de saber se a metodologia de RP atenderia as orientações desses documentos. Pelo PPP do curso de LEF, o egresso deve “tutorar o processo de ensino-aprendizagem, assumindo um papel de orientador das atividades propostas, sendo ele um mediador do desenvolvimento de seus alunos” (UDESC, 2004, p.4). Esse perfil desejado entra em consonância o papel do professor ao se adotar a metodologia de RP. Quanto ao egresso de BCC, espera-se que esse seja capaz de "identificar e resolver problemas na área da computação de forma metodológica e pró-ativa" (UDESC, 2010, p.9). Com essa análise documental foi constatado que ambos os PPP fazem menção a RP no perfil profissional do egresso, um de forma direta e o outro de forma indireta.

No experimento a ser relatado na próxima seção, procuramos adotar o roteiro de atividades sugerido pelo grupo GTERP, ou seja, buscamos ensinar através da metodologia RP.

4 O experimento

As atividades que foram propostas para introduzir o conteúdo de derivadas e que serão relatadas nesta sessão foram extraídas e/ou adaptadas da dissertação de mestrado de Andrea Abdelmalack (2011) intitulada "O ensino-aprendizagem-avaliação de derivada para o curso de Engenharia através da Resolução de Problemas". Abdelmalack desenvolveu sua pesquisa em horários extraclasse com um grupo de seis alunos. O diferencial dessa pesquisa com relação a de Abdelmalack está no fato de que o experimento foi realizado nos horários regulares de aula com todos os matriculados na disciplina de CDI1 (um total de 78 alunos), presentes nas aulas dos dias 27 e 29 de abril (2 horas-faixa cada dia em cada turma). Os sujeitos dessa pesquisa desconheciam o assunto de derivadas, exceto dois alunos repetentes que estavam matriculados na turma de ingressantes.

Na sequência do texto será relatada a experimentação realizada, com a descrição das atividades propostas[4] e como foi o desenvolvimento das aulas.

Ao iniciar a aula a professora solicitou que fossem formados grupos para realizarem as atividades. O número de membros de cada grupo variou de três a

[4] As atividades podem ser vistas em sua integra nos Apêndices A e B.

oito, pois como esse não fora o primeiro experimento realizado pela professora, com esses estudantes, eles já haviam formado grupos de trabalho e toda vez que era proposta uma atividade nessa modalidade os mesmos grupos se formavam por opção dos próprios estudantes. Cada aluno recebeu uma cópia impressa da atividade 1, conforme os Quadros 1 e 2.

Atividade 1

1. Um corpo inicia um movimento em linha reta e sua posição é dada conforme a Tabela 1. Com base nas informações da Tabela 1, preencha a Tabela 2 com o número correspondente a quantos quilômetros o corpo andou, em média, a cada hora.

Tabela 1 - Posição

Tempo (h)	Posição (km)
0	0
1	25
2	60
3	90
4	140
5	165

Tabela 2 – Deslocamento médio

Tempo (h)	Deslocamento médio por hora (km/h)
1	
2	
3	
4	
5	

2. Ao calcular os valores da 2ª coluna da Tabela 2, foi realizado o quociente entre a distância total percorrida pelo corpo pelo número de horas utilizadas nesse deslocamento. Se S é o espaço percorrido e t é o tempo, então ΔS e Δt representam, respectivamente, a variação do espaço percorrido e do tempo gasto. A esse quociente chamamos de velocidade média, que é denotada e definida por $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Use a Tabela 1 para calcular a velocidade média entre os instantes:
a. $t = 1$ e $t = 5$: b. $t = 2$ e $t = 5$: c. $t = 3$ e $t = 5$: d. $t = 4$ e $t = 5$.

Quadro 1[5] – Folha 1 da Atividade 1

Ressalta-se que apesar de estar trabalhando com duas turmas distintas, o comportamento dos alunos, o desenvolvimento e a discussão das atividades foram similares, por isso a descrição será feita de forma geral, sem particularizar cada uma das turmas. As questões 1 e 2 não geraram dificuldades de entendimento, os alunos praticamente realizaram-nas sem solicitar auxílio da professora nem dos próprios colegas. A professora observou que, apesar de estarem trabalhando em "grupo", a maioria estava realizando as atividades de forma individual. Como nas quatro questões propostas nessa atividade haviam diversas contas para serem efetuadas, a professora havia solicitado que trouxessem calculadoras com o intuito de que as atividades fossem executas com mais rapidez pelo auxílio da ferramenta tecnologia e dos colegas do grupo. Porém, foi observado que cada integrante do grupo realizava a atividade (usando

[5] Os quadros e figuras são de autoria própria.

a calculadora) de forma individual. Com essa atitude, pode-se perceber como os alunos também estão acostumados com o estilo tradicional e com atividades individuais. Além disso, esse individualismo fez com que o tempo gasto com as atividades fosse maior que o previamente programado.

3. Considere que o instante inicial $t_0 = 5s$ e que o tempo final $t_f = t_0 + \Delta t$ são os valores fornecidos na Tabela 3. Determine a velocidade média para os intervalos de tempo cada vez menores, conforme indicados na Tabela 3.

Tabela 3 – Velocidade média para pequenas variações no tempo

t_f	Δt	ΔS	v_m
6		5	
5.5		2.25	
5.1		0.41	
5.05		0.2025	
5.02		0.0804	
5.01		0.0401	

A seguir, responda:

a. O que você pôde observar com relação aos valores Δt?
b. Qual o valor que você acredita que seja a velocidade no instante $t = 5s$? Por quê?
c. Se quisermos calcular a velocidade do corpo em um determinado instante de tempo t qualquer como você acha que poderíamos fazer?

4. Considere que a posição (em metros) de um corpo em função do tempo (em segundos) é dada por

$$S(t) = 1 + 5t - 2t^2.$$

a. Considerando que $t_0 = 2s$, preencha a Tabela 4 para determinar a velocidade média do corpo no intervalo Δt.

Tabela 4

$t_0 + \Delta t$	Δt	$S(t_0 + \Delta t)$	$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$	v_m
2,5				
2,25				
2,12				
2,06				
2,03				
2,01				

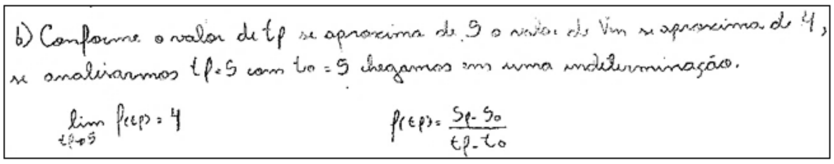
b. Qual é o valor que você julga ter a velocidade no instante $t = 2s$? Por quê?
c. E se você utilizasse o processo algébrico, o que encontraria por velocidade em $t = t_0$?

Quadro 2 – Folha 2 da atividade 1.

As dúvidas começaram a surgir no item (b) da terceira questão que perguntava qual o valor da velocidade para $t = 5s$. A partir desse momento, pode-se dizer que os grupos de fato começaram a trabalhar como grupo, ou seja, que existiu interação entre os membros. Desse instante em diante, a professora foi mais solicitada para auxiliar na interpretação do que estava sendo solicitado. Várias equipes tinham dúvida porque estavam tentando usar a definição de velocidade média para responder o que acontecia com o valor da velocidade no instante em que $t = 5\,s$, pois até o aquele momento não fora apresentada nenhuma função que descrevesse o espaço percorrido S em função do tempo.

Dessa forma, para calcular a velocidade instantânea, vários alunos escreviam que a velocidade era $v_m = \frac{0}{0}$. Ao fazerem isso, percebiam que tinha algo errado. O zero do numerador era considerado pela observação da terceira coluna da Tabela 3 [da questão 3], pois ΔS estava se aproximando de zero. Ou seja, estavam interpretando os cálculos que fizeram anteriormente. Porém, o zero do denominador muitos alunos quando questionados sobre o porquê do zero respondiam que pela definição de velocidade média faziam tempo final menos inicial e, nesse caso, ambos eram iguais. Então, para tentar conduzir a interpretação correta, a professora questionava as equipes sobre o que podiam observar nos valores calculados na Tabela 3. Respondiam corretamente, que quando Δt tende a 5, a velocidade média se aproximava de 4. Com relação a esse mesmo item ainda, a professora observou a produtiva discussão de um grupo. Um aluno estava explicando para os colegas que em $\mathrm{t} = 5\,s$ o Δt daria zero, então não poderia substituir $\mathrm{t} = 5\,s$ na velocidade média. Por isso, precisaria tomar o limite, pois os valores [calculados na Tabela 3] estavam indo para $\mathrm{t} = 5\,s$, então deveriam estudar o que ocorria próximo do valor 5 para concluir o que ocorreria no instante solicitado conforme ilustra a Figura 1. No item (c) da questão 3, os alunos sentiram bastante dificuldade para expressar como seria possível calcular a v_m em um instante qualquer. Mesmo assim, houveram equipes que expressaram a velocidade em termos de limite. Isto é, escreveram $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Na questão 4, do Quadro 1, em que a função posição foi fornecida muitas equipes pediram auxílio para a professora, pois ao efetuarem os cálculos de ΔS muitos julgavam que não fazia sentido uma variação do espaço ser negativo. Essa dúvida surgiu devido a confusão entre o significado de distância e de deslocamento. Como essa dúvida era geral, a professora teve que intervir e explicar a diferença entre distância e deslocamento, para que compreendessem por que o deslocamento poderia ser negativo. Outra dificuldade, apresentada por alguns alunos, foi na interpretação de $S(t_0 + \Delta t)$. Os estudantes com essa dúvida ainda não compreenderam a diferença entre a composta e o produto de duas funções. Nesse caso, estavam interpretando a composta como sendo um produto. Nessa questão, após completarem a Tabela 4, não tiveram dificuldades em responder à questão b, pois era análoga ao item (b) da questão 3. A resposta apresentada por uma equipe foi: *"A velocidade no tempo $t = 2s$ é $-3m/s$, de acordo com a tabela, quanto mais o tempo se aproxima de 2 mais a velocidade se aproxima de 3".* Apesar de vários alunos responderam corretamente o item (b), apresentaram dificuldades em trabalhar com o t qualquer no item (c).


b) Conforme o valor de tp se aproxima de 5 o valor de Vm se aproxima de 4, se analisarmos tp=5 com to=5 chegamos em uma indeterminação.

$\lim_{tp \to 5} f'(tp) = 4$ $f'(tp) = \frac{Sp - So}{tp - to}$

Figura 1 – Resposta da questão 3b.

Em seguida, faltando pouco tempo para a finalização da aula, a professora fez a correção das questões no quadro com auxílio da turma. Pela metodologia de RP, conforme recomendado pelo grupo GTERP, costuma-se fazer uma plenária, mas como é apenas uma sugestão, por falta de tempo e por já ter tentado em outra experiência nessas mesmas turmas e não ter sido aprovada por eles, a professora optou por fazer uma discussão coletiva. Ela questionava o que haviam feito e com base nisso registrava no quadro. Se houvessem resoluções diferentes, procurava considerar as diferentes resoluções. As tabelas de todas as questões foram preenchidas corretamente pela maioria dos grupos. As dúvidas que surgiram nas questões 2 e 4 já foram explicitadas anteriormente. A questão 4, item (c), foi resolvida detalhadamente no quadro, pois não houveram respostas corretas. Os grupos que apresentaram alguma resposta, consideraram o valor de $t_0 = 2s$, ou seja, refizeram o item (a).

Para a realização da atividade 1 foram previstas cinco questões, mas como as questões dispenderam bastante tempo, a quinta questão programada para a essa atividade passou a ser a primeira questão da atividade 2, conforme o Quadro 3. Essa atividade foi entregue no final da aula e a resolução deveria ser entregue no início da próxima aula. O assunto envolvido era definição de derivada num ponto e interpretação geométrica da derivada.

Atividade 2

1. A derivada de uma função $f(x)$ no ponto cuja abscissa é x_0 é definida como o limite da taxa média de variação, ou seja,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Complete a Tabela 5, considerando que $f(x) = x^2$ e que $x_0 = 2$.

$x_0 + \Delta x$	Δx	$f(x_0 + \Delta x)$	Δf	$\Delta f \,/\, \Delta x$
2,5				
2,1				
2,01				

a. Observando os valores calculados na Tabela 5, o que você acha que ocorre com a derivada de f quando $x_0 = 2$? Em outras palavras, qual é o valor de $f'(2)$?

b. E se você utilizasse o processo algébrico, o que encontraria por $f'(x_0)$?

2. Seja C o gráfico da função $f(x) = x^2$. Determine o coeficiente angular da reta secante a C que passa pelos pontos $P(2,4)$ e Q, para:

a. $Q(0,0)$; b. $Q(1,1)$; c. $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ d. $Q(1,9; 3,61)$ e. $Q(x_0, x_0^2\ )$.

A seguir responda: qual é o valor do coeficiente angular da reta tangente a C no ponto P? Por quê?

Quadro 3 – Atividade 2.

No início da aula do dia 29 de abril, após as resoluções da atividade 2 terem sido entregues, a professora iniciou a discussão dessa atividade. A questão 1 (Quadro 2) solicitava para que fosse preenchida a Tabela 5, considerando a função $f(x) = x^2$, para $x_0 = 2$. Após esse procedimento, o item (a) pedia o valor da derivada de f em $x_0 = 2$. Pela experiência que obtiveram ao realizarem a atividade 1, responderam esse item sem grandes dificuldades. Por observação dos valores calculados, responderem que quando x se aproxima de 2, Δx tende a zero e $f'(x_0)$ se aproxima de 4. Como essas atividades foram feitas em horário extraclasse, os alunos puderam pesquisar como se resolviam as questões, por isso, não manifestaram muitas dúvidas no momento da correção. Até o item (b), da questão 1, foi feito corretamente (Figura 2), ou seja, a resposta apresentada foi $f'(x_0) = 2x_0$.

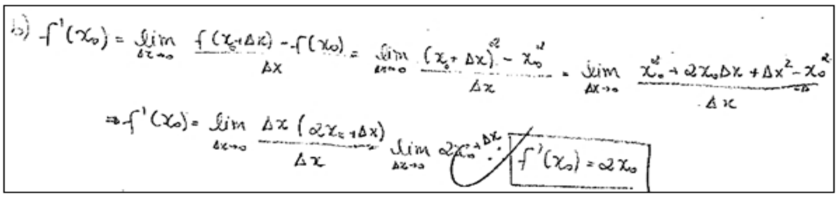
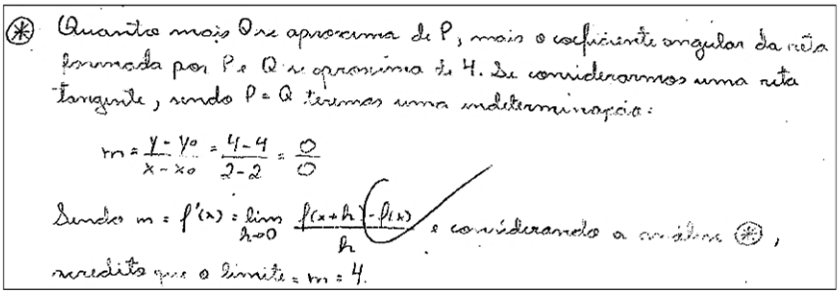


Figura 2 – Resposta da questão 1b.

A questão 2 da atividade 2 pretendia motivar a interpretação geométrica da derivada. Para tanto pedia-se que fosse determinada a equação da reta secante (m_S) ao gráfico da função $f(x) = x^2$ contendo os pontos $P(2,4)$ e Q cujas coordenadas se aproximavam de P. Na sequência pedia-se para determinar o coeficiente angular da reta secante considerando um ponto Q genérico, de coordenadas $Q(x_0, x_0^2)$. Para a determinação do valor m_s em todos esses itens não houveram problemas detectados. O último questionamento era a respeito do valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P. Para discutir essa questão, a professora utilizou o software dinâmico GeoGebra, considerando um ponto móvel sobre a curva da forma $Q\big(x_0, f(x_0)\big)$. Dessa forma, os estudantes puderam visualizar que quando o ponto Q se deslocava sobre a curva na direção do ponto P, a reta tangente correspodia a posição limite da reta secante e que o coeficiente angular da reta secante tendia a ser igual a 4. Alguns alunos fizerem essa interpretação corretamente no papel (ver Figura 3), outros colocaram como definição de que o coeficiente angular da reta tangente é igual a derivada da função aplicada no ponto (pois usaram a bibliografia recomendada no plano de ensino). Ao mesmo tempo em que a professora questionava a turma como responderam as questões, corrigia a atividade e formalizava a conteúdo. Na sequência, a professora trabalhou com questões que envolviam retas tangente e normal ao gráfico de uma função.


(*) Quanto mais Q se aproxima de P, mais o coeficiente angular da reta formada por P e Q se aproxima de 4. Se considerarmos uma reta tangente, sendo P = Q teremos uma indeterminação:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Sendo $m = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ e considerando a análise (*), acredito que o limite $= m = 4$.

Figura 3 – Resolução da questão 2
Fonte: Produção dos alunos.

5 Considerações finais

Ao finalizar esse texto, pode-se inferir que a metodologia de RP está se mostrando adequada para se trabalhar com CDI1, pois um primeiro resultado já foi observado pela professora que aplicou essas atividades. Pela sua experiência docente, como relatada na justificativa desse artigo, foi a primeira vez que na avaliação escrita, a questão que abordava a interpretação geométrica da derivada de uma função, que nenhum dos seus alunos (que respondeu à questão) confundiu o coeficiente angular como sendo a reta tangente, ou ainda, o coeficiente angular como sendo a função derivada de primeira ordem.

Por fim, está sendo um grande desafio à professora-pesquisadora inserir a metodologia de RP em suas aulas, pois dá muito trabalho ao professor sair de sua zona de conforto e se propor a fazer aulas/atividades diferenciadas. Por outro lado, comentários de alunos como "*é possível entender [pela metodologia de RP] toda a lógica envolvida na Matemática e perceber que tudo tem fundamento e não 'caiu do céu'*" e *"num futuro distante quando for lecionar pretendo inserir essa metodologia em minhas aulas"* servem de estímulo e incentivo para que esses pesquisadores possam continuar a pesquisa nessa área.

Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESC - Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina pelo apoio financeiro ao Grupo de Pesquisa PEMSA.

Referências

ABDELMALACK, Andrea. **O ensino-aprendizagem-avaliação de derivada para o curso de Engenharia através da resolução de problemas.** 2011, 175 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática), Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

FIGUEIREDO, Elisandra B.; SIPLE, Ivanete Z.; AZEVEDO, Eliane B.; MORO, Graciela. Uma experiência de trabalho colaborativo nas disciplinas básicas de matemática nos cursos de Engenharia. **ABENGE**. Revista de Ensino de Engenharia. v.33, n. 1, p 13-23, jan/jun, 2014.

GONÇALVES, Daniele C.; REIS, Frederico S. Aplicações de derivadas no Cálculo I: uma atividade investigativa aplicada à Engenharia de Produção utilizando o Geogebra. **Revista da Educação Matemática da UFOP**, 1, 9 p, 2011.

MENESTRINA, Tatiana C.; GOUGARD, Beatriz. Atualização e revisão pedagógica de cálculo e álgebra: Concepções e atitudes Inovadoras. **XXXI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**. Joinville (SC), 11 p., 2003.

NOGUTI, Fabiane C. H.. **Um curso de matemática básica através da resolução de problemas para os ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete.** 2014, 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

ONUCHIC, Lourde R.; ALLEVATO, Norma S. G.; NOGUTI, Fabiane C. H.; JUSTULIN, Andressa M.. **Resolução de Problemas: teoria e prática.** Paco Editorial, Jundiaí/SP, 2014.

ONUCHIC, Lourde R.. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Espaço Pedagógico**, v.20, n.1, Passo Fundo (RS), p. 88-104, jan/jun. 2013.

PAGANI, Érica M. L.; ALLEVATO, Norma S. G.. Ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. **VIDYA**, 34(2), jul./dez., 2014 - Santa Maria.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Interciência, 2006.

RAFAEL, Rosane C.; ESCHER, Marco A.. Evasão, baixo rendimento e reprovações em Cálculo Diferencial e Integral: uma questão a ser discutida. **VII Encontro Mineiro de Educação Matemática**. Juiz de Fora (MG), 12 p., 2015.

UDESC. Departamento de Ciência da Computação. **Projeto Político Pedagógico do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação.** Joinville (SC), 2010.

UDESC. Departamento de Física. **Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Física**. Joinville (SC), 2004.

ZUCHI, Ivanete. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional**, 2005, 257f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

APÊNDICE A - ATIVIDADE 1

Acadêmicos:____ Data:__________

Obs: As Atividades 1 e 2 foram extraídas/adaptadas da dissertação de mestrado de Andrea Abdelmalack (2011) intitulada "O ensino-aprendizagem-avaliação de derivada para o curso de Engenharia através da Resolução de Problemas".

1. Um corpo inicia um movimento em linha reta e sua posição é dada conforme a Tabela 1. Com base nas informações da Tabela 1, preencha a Tabela 2 com o número correspondente a quantos quilômetros o corpo andou, em média, a cada hora.

Tabela 1 - Posição

Tempo (h)	Posição (km)
0	0
1	25
2	60
3	90
4	140
5	165

Tabela 2 – Deslocamento médio

Tempo (h)	Deslocamento médio por hora (km/h)
1	
2	
3	
4	
5	

2. Ao calcular os valores da 2ª coluna da Tabela 2, foi realizado o quociente entre a distância total percorrida pelo corpo pelo número de horas utilizadas nesse deslocamento. Se S é o espaço percorrido e t é o tempo, então ΔS e Δt representam, respectivamente, a variação do espaço percorrido e do tempo gasto. A esse quociente chamamos de velocidade média, que é denotada e definida por $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Use a Tabela 1 para calcular a velocidade média entre os instantes:
   a. $t = 1$ e $t = 5$;
   b. $t = 2$ e $t = 5$;
   c. $t = 3$ e $t = 5$;
   d. $t = 4$ e $t = 5$.

3. Considere que o instante inicial $t_0 = 5s$ e que o tempo final $t_f = t_0 + \Delta t$ são os valores fornecidos na Tabela 3 Determine a velocidade média para os intervalos de tempo cada vez menores, conforme indicados na Tabela 3.

Tabela 3 – Velocidade média para pequenas variações no tempo

t_f	Δt	ΔS	v_m
6		5	
5.5		2.25	
5.1		0.41	
5.05		0.2025	
5.02		0.0804	
5.01		0.0401	

A seguir, responda:

a. O que você pôde observar com relação aos valores Δt?
b. Qual o valor que você acredita que seja a velocidade no instante $t = 5s$? Por quê?
c. Se quisermos calcular a velocidade do corpo em um determinado instante de tempo *t* qualquer como você acha que poderíamos fazer?

4. Considere que a posição (em metros) de um corpo em função do tempo (em segundos) é dada por

$$S(t) = 1 + 5t - 2t^2.$$

a. Considerando que $t_0 = 2s$, preencha a Tabela 4 para determinar a velocidade média do corpo no intervalo Δt.

Tabela 4

$t_0 + \Delta t$	Δt	$S(t_0 + \Delta t)$	$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$	v_m
2,5				
2,25				
2,12				
2,06				
2,03				
2,01				

b. Qual é o valor que você julga ter a velocidade no instante $t = 2s$? Por quê?
c. E se você utilizasse o processo algébrico, o que encontraria por velocidade em $t = t_0$?

APÊNDICE B - ATIVIDADE 2

Acadêmicos:____ Data:__________

1. A derivada de uma função $f(x)$ no ponto cuja abscissa é x_0 é definida como o limite da taxa média de variação, ou seja,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Complete a Tabela 5, considerando que $f(x) = x^2$ e que $x_0 = 2$.

$x_0 + \Delta x$	Δx	$f(x_0 + \Delta x)$	$f(x_0)$	Δf	$\Delta f \ / \ \Delta x$
2,5					
2,1					
2,01					
2,001					

a. Observando os valores calculados na Tabela 5, o que você acha que ocorre com a derivada de f quando $x_0 = 2$? Em outras palavras, qual é o valor de $f'(2)$?\
b. E se você utilizasse o processo algébrico, o que encontraria por $f'(x_0)$?

2. Seja C o gráfico da função $f(x) = x^2$. Determine o coeficiente angular da reta secante a C que passa pelos pontos:

a. $P(2{,}4)$ e $Q(0{,}0)$;
b. $P(2{,}4)$ e $Q(1{,}1)$;
c. $P(2{,}4)$ e $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$;
d. $P(2{,}4)$ e $Q(1{,}9; 3{,}61)$;
e. $P(2{,}4)$ e $Q(x_0, x_0^2\ )$.

A seguir responda: qual é o valor do coeficiente angular da reta tangente a C no ponto P? Por quê?