



GeoGebra no Ensino Médio: Análise de uma atividade com geometria e funções

GeoGebra in High School: Analysis of an activity with geometry and functions

Willians Adriano de Oliveira¹

Nielce Meneguelo Lobo da Costa²

Resumo

Este artigo relata uma atividade desenvolvida em um curso de formação continuada, voltada para professores de matemática da rede pública do estado de São Paulo. O objetivo da atividade foi o de promover a articulação entre os quadros geométrico e algébrico; investigar a variância conjunta da medida dos lados e da área de um retângulo. A formação se insere em projeto de pesquisa mais amplo que intenta identificar possibilidades para ampliação/construção do conhecimento profissional a partir de reflexões envolvendo áreas de figuras planas e funções quadráticas. A fundamentação teórica vem dos estudos de Mishra e Khoeler sobre o conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo (TPACK) e nos estudos de Ponte sobre atividades exploratório-investigativas. O software GeoGebra foi utilizado para possibilitar aos professores participantes a exploração da situação proposta e a manipulação do retângulo, mantendo suas propriedades. A análise identificou que o software auxiliou nas explorações e investigações, as reflexões e discussões subsidiaram a construção de conhecimentos e explicitou a não familiaridade dos professores com atividades de cunho exploratório e investigativo.

Palavras-chave: TPACK. Formação continuada. Atividade exploratória investigativa. Função quadrática. GeoGebra.

Linha Temática: Educação Matemática

1. Introdução

A escolha por pesquisar Funções articuladas à Geometria adveio do fato de que já na década de 1930 ocorreram no Brasil discussões a respeito do modo de ensino da matemática e foi recomendado que o estudo de funções fosse um dos eixos centrais ao ensinar matemática, contemplando suas diferentes

¹ Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo UNIAN, e-mail: willians_oliveira79@hotmail.com

² Orientadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo UNIAN, e-mail: nielce.lobo@gmail.com



representações: geométricas, algébricas e gráficas. Especialmente porque, a partir do estudo de funções é possível integrar aritmética, álgebra e geometria.

Nesse artigo descrevemos e analisamos o desenvolvimento de uma atividade por professores de Matemática participantes de um curso de formação continuada denominado “Geogebra no Ensino Médio: aplicações com funções quadráticas”. Esse curso está inserido em um projeto de pesquisa mais amplo, cujo objetivo é o de identificar as possibilidades para a ampliação/construção do conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo a partir das discussões e reflexões compartilhadas envolvendo áreas de figuras planas e funções quadráticas, exploradas por meio do software GeoGebra. O projeto de pesquisa em questão está conectado ao Programa Observatório da Educação da CAPES.

A pesquisa caracteriza-se como qualitativa do tipo pesquisa-ação. Segundo Thiollent (1985):

A pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (THIOLLENT, 1985, p.14).

Nesse tipo de pesquisa devemos diagnosticar o problema prático a resolver, formular estratégias de ação, desenvolver essas estratégias e avaliar sua eficiência, ampliar a compreensão da nova situação, contribuir para a discussão ou fazer avançar o debate acerca das questões abordadas.

A pesquisa foi constituída das seguintes fases:

Fase 1: Pesquisa documental e composição de um processo formativo baseado em atividades exploratório-investigativas que envolvem funções quadráticas e áreas, e submissão do projeto à Comissão de Ética.

Fase 2: Pesquisa de campo - desenvolvimento do processo formativo.

O processo de formação continuada foi por um curso com carga horária de 36 horas distribuídas em seis encontros de cinco horas cada um e seis horas a



distância com o uso de um ambiente de aprendizagem AVA alojado em uma plataforma Moodle.

Fase 3: Análise dos dados coletados

A coleta de dados foi feita por meio de:

- Gravação em áudio e vídeo dos encontros do módulo formativo;
- Entrevistas aos professores, tanto antes como depois da pesquisa, por meio de questionário e de entrevistas semiestruturadas;
- Os sujeitos da pesquisa foram seis professores que participaram de todos os encontros do curso.

No recorte aqui apresentado analisamos uma atividade em que os professores estudaram um problema geométrico, cuja resolução envolve uma função quadrática.

2. Fundamentação Teórica

A fundamentação teórica da pesquisa, relativa ao recorte aqui apresentado, se construiu a partir da teoria de Mishra e Koehler (2006), quanto aos conhecimentos necessários para o professor ensinar na presença da tecnologia digital e dos estudos de Ponte (2003) e de Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) sobre atividades exploratório-investigativas.

Mishra e Koehler construíram um modelo para expressar os conhecimentos necessários para os professores desenvolverem uma prática pedagógica “eficaz” em ambientes de aprendizagem com tecnologia. Tomando como aporte teórico estudos de Shulman (1986,1987) segundo o qual, para se ensinar é necessária a articulação entre dois tipos de conhecimentos: o do conteúdo e o da pedagogia, tal interligação gera um novo tipo de conhecimento, denominado pelo autor de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, sigla PCK. Os pesquisadores Mishra e Koehler (2006) agregaram a tecnologia a esse cabedal de conhecimentos. Para eles, a tecnologia até então não estava associada ao PCK, entretanto em sua



presença há necessidade de um conhecimento mais amplo que a agregue ao ensino. Isso significa dizer que o professor necessita de um tipo de conhecimento que denominaram: Conhecimento Pedagógico Tecnológico do Conteúdo, ao qual foi associada a sigla TPACK.

O TPACK é um conhecimento que ultrapassa os três componentes: conteúdo (no caso a matemática), pedagogia e tecnologia. A integração desses componentes habilita o indivíduo a fazer uso das tecnologias digitais como mais uma forma de se representar o pensamento.

A figura 1 retrata os conhecimentos componentes do Modelo TPACK.

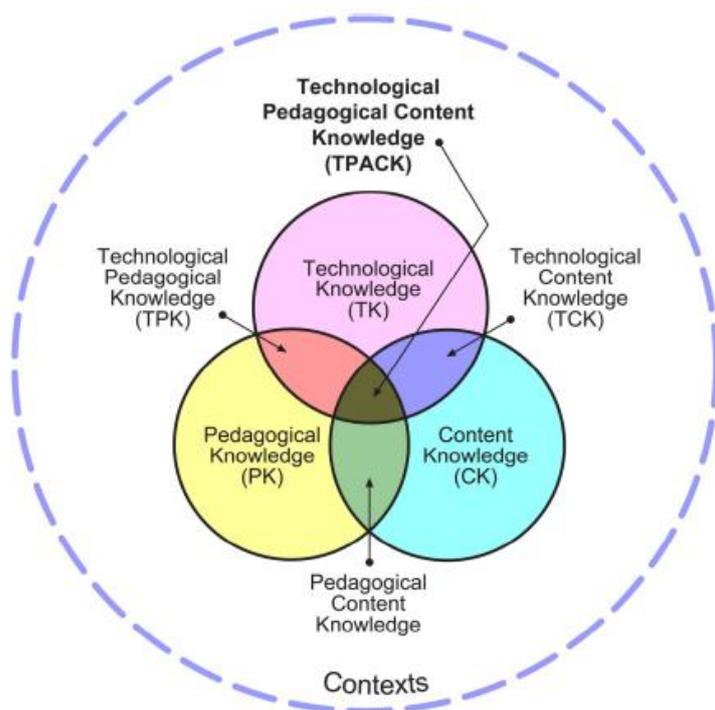


Figura 1 – Modelo TPACK
Fonte: Koehler, M. J. & Mishra, P. (2009) p. 63.

As Características do Conhecimento Pedagógico Tecnológico do Conteúdo incluem a compreensão pelo professor:

- das representações de conceitos utilizando tecnologias;



- das técnicas pedagógicas que usam as tecnologias de forma construtiva para ensinar conteúdos;
- do que faz com que alguns conceitos sejam difíceis e outros fáceis de aprender e como a tecnologia pode auxiliar a enfrentar as dificuldades;
- o conhecimento prévio dos alunos e das teorias epistemológicas;
- das possibilidades de uso da tecnologia para o aluno construir conhecimentos.

Deste modo fica evidenciado que, para utilizar tecnologia ao ensinar matemática de forma a atender as especificidades de cada um de seus campos deve-se considerar o contexto educacional de atuação, de modo a auxiliar o aluno a construir conhecimento matemático curricular e atingir os objetivos do ensino.

Para Koehler e Mishra (2008), o TPACK é a base para que o professor desenvolva um ensino eficaz com as tecnologias e, ainda, é a condição para que ele seja capaz de integrá-las nas atividades curriculares. Esse tipo de ensino exige uma compreensão por parte do professor das técnicas pedagógicas que possibilitam usar as tecnologias para auxiliar a construção do saber pelo aluno. Os autores indicam que a formação de professores deve se preocupar com o desenvolvimento do TPACK numa forma gradual e em espiral, começando com as tecnologias mais simples e que os professores já conhecem (os quais já podem ter desenvolvido competências ao nível do TPACK), direcionado a aplicações cada vez mais complexas e sofisticadas. Pretende-se que o professor seja capaz de tomar decisões fundamentadas no desenho das suas atividades de ensino com tecnologias, o que pressupõe saber usá-las numa dada área curricular e integrá-las numa estratégia pedagógica específica em certo contexto, de modo a promover a construção do conhecimento pelo aluno num determinado conteúdo.

Em relação às atividades em matemática, Ponte (2003) afirma que uma tarefa tem quatro dimensões básicas: “O seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução” (PONTE, 2003, p.6). Em nossos estudos nos fixaremos nas duas primeiras que para o



autor compreendem quatro tipos de tarefas no tocante de trabalharmos com uma atividade aberta exploratória investigativa. Nesse tipo de atividade é importante observarmos o que Canavarro, Oliveira e Menezes (2012, p. 268) descrevem como “diversidade de papéis que a professora e os alunos assumem nesta aula”, delineando o ensino exploratório de Matemática sendo aquele em que o aluno exerce seu papel de protagonista trabalhando de forma autônoma ora o professor assume o papel de condutor da atividade para sistematização das aprendizagens dos alunos.

3. Atividade no GeoGebra: aplicação com função quadrática

Este relato apresenta o desenvolvimento de uma das atividades desenvolvidas em um curso de formação continuada, realizada com os professores de educação básica da rede pública de ensino do Estado de São Paulo. Os sujeitos de pesquisa foram seis professores, denominados ao longo desse trabalho por professor A, C, F, H, T e W que participaram de todos os encontros do curso. O objetivo da atividade foi o de promover a articulação entre os quadros geométrico e algébrico; investigar a variação conjunta da medida dos lados e da área do retângulo.

No início do curso identificamos que a maioria dos professores participantes estava começando a utilizar o software GeoGebra, fato que nos levou a optar por fornecer um arquivo pronto, já com a construção do retângulo.

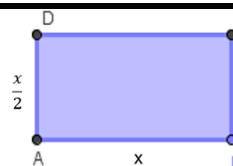
A atividade solicitava o estabelecimento da relação existente entre a medida da base e a área do retângulo dado, a respectiva função área (vide Figura 2). Foi dado aos professores um protocolo com 8 questões de caráter investigativo e um arquivo do GeoGebra com a construção de um retângulo cuja medida da altura era a metade da medida da base. Foi solicitado que deslocassem o único ponto móvel B (vide Figura 2) e observassem o que ocorria com o retângulo. A partir da exploração do arquivo no GeoGebra deveriam responder as questões do protocolo.



Área de um retângulo

No retângulo da figura ao lado, temos $AB = x$ e $AD = \frac{x}{2}$,

B é um ponto móvel sobre a semirreta \overrightarrow{AB} .



- 1) Investigue a variação de x e a correspondente variação da área. O que você descobriu?
- 2) Qual é a expressão que define a área $A(x)$ desse retângulo em função da medida x da base?
- 3) Denominando de ponto $P(x,y)$ de coordenadas $x =$ medida de AB e $y = A(x)$ ou seja, medida da área do retângulo $ABCD$. Determine a relação entre a medida de x desse retângulo e sua área no *GeoGebra*.
- 4) Desloque o ponto B e observe o que ocorre com o ponto P . O que você descobriu?
- 5) Habilite **exibir rastro** para o ponto P e repita o procedimento anterior. O que você descobriu?
- 6) Construa o gráfico dessa função. Compare com o rastro do ponto P . São equivalentes?
- 7) O rastro do ponto P percorre toda a parábola? Como escrever a função?
- 8) Quais foram suas observações com relação a essa atividade?

Figura 2 - Protocolo da atividade área de um retângulo

Fonte: Acervo dos autores, 2016.

A questão inicial solicitava que se investigasse a variação de x e a correspondente variação da área. Feito isso, que se relatasse as descobertas.

Constatamos que dos seis professores, cinco afirmaram que: “quanto maior o valor de x maior a área”. Tais professores não se referiram à maneira como ocorreria essa relação de aumento, se era na mesma proporção ou não. Percebemos que três fizeram experimentações atribuindo valores a x e determinando a área do retângulo e, dentre estes, dois relataram que “a razão em que a área aumenta é quatro vezes maior em relação a medida x (da base)”. Notamos que, ao longo das investigações todos os três atribuíram valores naturais a x , ainda que com o software estivessem disponibilizados incrementos decimais para os valores do segmento x .

Na segunda questão pedia-se a expressão que define a área $A(x)$ desse retângulo em função da medida de sua base.

Observamos que todos os seis descreveram a função área como sendo: $A(x) = \frac{x^2}{2}$ ou na forma $A(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$. Fato que mostra a mobilização do conhecimento do conteúdo.

Na terceira questão era pedido para se construísse um ponto $P = (x,y)$ em que x representasse a medida da base e y representasse a área do retângulo



com a sintaxe do software. Isso foi feito com a orientação do formador. Era necessário observar o nome dado ao segmento da base, por exemplo a , e o nome dado à área do retângulo, por exemplo $pol1$. Deveriam digitar no campo de entrada $P=(a,pol1)$, por fim apertar a tecla enter. Feito isso o feedback do software era o ponto P como na Figura 3.

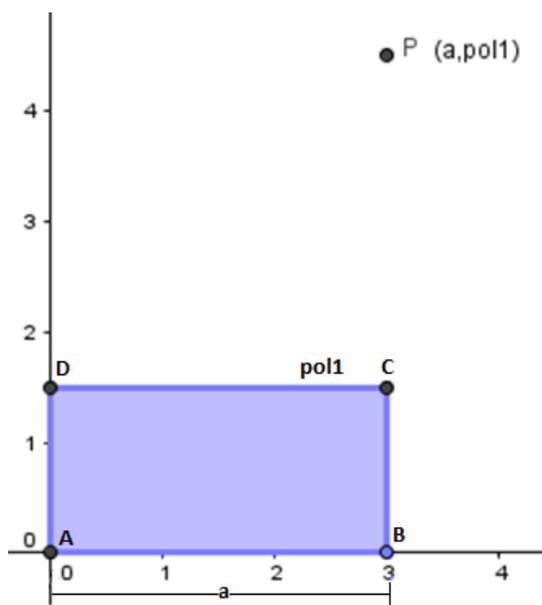


Figura 3 - Protocolo construção do ponto P
Fonte: Acervo dos autores, 2016.

Nesse momento tratava-se de auxiliar os participantes na construção do conhecimento tecnológico do conteúdo, necessário no caso, para construir o ponto P .

Um dos professores, o professor F , nos indagou o porquê de seu ponto P não estar como havíamos mostrado na projeção do Datashow. A Figura 4 explicita o ponto P obtido por esse professor. Verificamos que ele havia construído um vetor e não um ponto. Informamos a ele qual é a sintaxe do software para nomear um ponto, no caso, é P maiúsculo, pois em minúsculo o software entende como sendo nomeado um vetor.

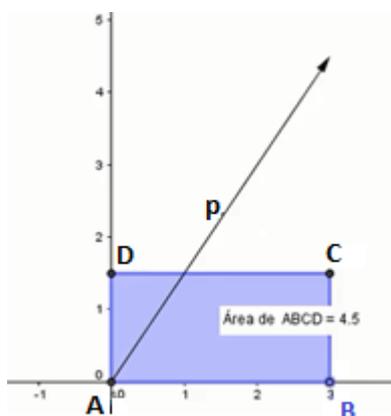


Figura 4 - Construção do professor F.
Fonte: Acervo dos autores.

Aqui auxiliamos o professor F na construção do conhecimento do software GeoGebra, ou seja, o tecnológico do conteúdo.

A quarta questão solicitava que fosse investigada a variação do ponto P quando se deslocava o ponto B e, em seguida, fossem registradas as descobertas.

Nessa questão, alguns dos registros dos sujeitos estão abaixo:

O professor C escreveu: *“o ponto P é a parte crescente da parábola”*.

O professor F escreveu: *“Quando a área aumenta o ponto P se distância na mesma medida”*.

O professor W escreveu que *“o ponto (P) sempre se movimenta na função $\frac{x^2}{2}$ na parte crescente, pois não poderíamos ter uma área negativa”*.

Os professores C e W observaram e concluíram de forma assertiva quanto a forma de deslocamento do ponto P diferentemente da observação equivocada do professor F que afirmou se tratar de um deslocamento linear.

Nossa expectativa era que afirmassem que o ponto P pertence à curva e se desloca apenas na parte positiva ou crescente.

Segundo Ponte nas atividades de exploração e investigação “Uma preocupação fundamental que se destaca [...] é a de dar ao aluno a



responsabilidade de descobrir e de justificar as suas descobertas.” (PONTE, 2003, p.6)

Nessa questão observamos que os professores participantes levantaram conjecturas e as testaram, como é usual em uma atividade de caráter investigativo.

A questão cinco solicitava a habilitação de “exibir rastro” para o ponto P e a repetição do procedimento de movimentar B e relatar o ocorrido com P.

O professor T disserta que: “*o rastro do ponto P desenha a parte crescente da parábola*” e o professor H, corroborando com o professor T, escreveu “*o rastro permanece na parte crescente mesmo se x ficasse negativo*”. O que é correto, entretanto não houve consenso quanto à veracidade dessas afirmações. O professor F escreveu: “*cria-se uma função exponencial em relação ao vértice A*”. Para ele não se tratava do gráfico de uma função quadrática.

Notamos que cinco dos professores mobilizaram seus conhecimentos do conteúdo, por terem feito observações de modo assertivo com relação a atividade se referindo ao rastro do ponto P ficar na parte crescente da parábola.

Na sexta questão era solicitada a construção do gráfico da função e a comparação com o rastro do ponto P. Feita a construção os professores deveriam constatar se os resultados obtidos pelos dois processos eram equivalentes.

Quatro professores concluíram que não. Como dissertou o professor A “*o rastro se limita à parte crescente da curva*”. Percebemos nessa ocasião que o conhecimento específico do conteúdo os professores T e F estava em construção pois, escreveram que sim, eram equivalentes, no entanto se fazia necessário observar a restrição do domínio desta função, ou seja, se fazia necessário, como afirma Muraca (2011), reconceituar esse conteúdo lhe atribuindo significado e ampliando seus conhecimentos prévios.

A sétima questão era complementar à anterior, pois indagava se o rastro percorre toda a parábola e como deveria ser escrita a função na representação algébrica.



Todos os seis professores responderam que o rastro *não* percorre toda a parábola, sendo que quatro escreveram “que percorre a parte crescente”. Nesse momento do curso, como formadores, observamos que se fazia necessária uma discussão coletiva de modo a levar o grupo a refletir sobre a necessidade de restringir o domínio da função. A Figura 5 ilustra o antes, sem a restrição do domínio, e o depois, com a restrição do domínio da função. É importante destacar que somente no segundo caso ficou evidenciada a relação do ponto P com a função. Sendo assim, auxiliamos os professores na construção de conhecimento tecnológico do conteúdo.

Ressaltamos na Figura 5 (gráfico à direita) o rastro coincide com o gráfico da função área $f(x) = \frac{x^2}{2}$ para $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

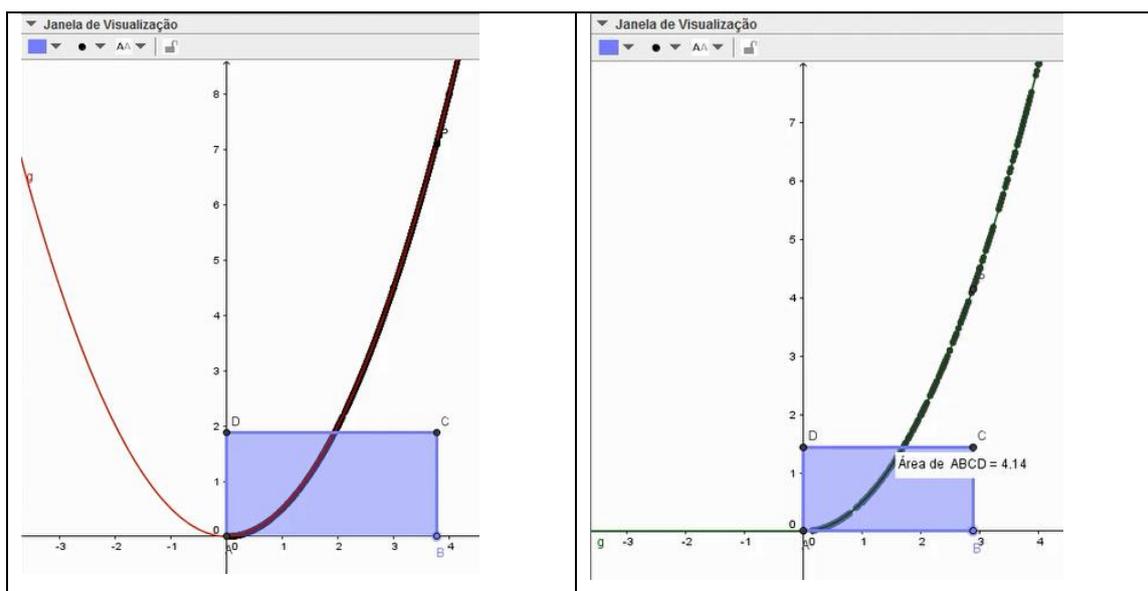


Figura 5 - Construção da função sem a restrição X com restrição do domínio.
Fonte: Acervo dos autores.

A última pergunta se referia ao registro de observações pessoais em relação à atividade.

O professor W escreveu “*Achei muito bom, melhorou minhas percepções e aprendi algo novo*” por outro lado o professor H escreveu “*complexa, pois temos que relembrar conceitos já deixados de lado*”. Observamos, pelas evidências em



seus comentários, que o conhecimento pedagógico do conteúdo começou a ser construído/mobilizado.

A partir das análises concluímos que o software auxiliou nas explorações e investigações para o desenvolvimento da atividade e que as reflexões e discussões subsidiaram a construção de conhecimentos e explicitou a não familiaridade dos professores com atividades de cunho exploratório e investigativo.

4. Considerações finais

A atividade aqui desenvolvida teve para os professores participantes um caráter investigativo pois, eles tiveram que refletir e levantar conjecturas em situações que envolviam os conhecimentos, tanto o tecnológico do conteúdo, quanto o pedagógico do conteúdo e o pedagógico tecnológico, assim trilhando um caminho necessário para o desenvolvimento do conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo, o TPACK.

Na atividade aqui analisada, os professores estudaram um problema geométrico, relacionando-o a uma função quadrática, e no seu decorrer surgiram várias dúvidas que eles tiveram de dissipar para a realização e compreensão da tarefa e para articularem os quadros geométrico e algébrico; investigando a variação conjunta da medida dos lados e da área do retângulo. O software GeoGebra auxiliou nas explorações e investigações fornecendo feedback das ações desenvolvidas.

Ficou evidenciado que os professores participantes não estavam familiarizados com atividades de cunho exploratório e investigativo e que as reflexões precisariam ser retomadas e as discussões aprofundadas.



5. Agradecimentos

Agradecemos ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de bolsas e demais subsídios para o desenvolvimento desta pesquisa, alojada no Projeto 19366/12 Edital 049/12.

6. Referências

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. **Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática**, p. 155-166, 2012. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/7041>. Acesso em 01 jul. 2016.

MISHRA, P.; KOEHLER, J. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. **Teachers College Record**, v. 108, n.6, p. 1017-1054, 2006.

MURACA, F. S. **Educação continuada do professor de Matemática**: um contexto de problematização desenvolvido por meio de atividades exploratório-investigativas envolvendo geometria espacial de posição. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Bandeirante de São Paulo, 2011.193f.

PONTE, J.P. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do ProfMat**, Lisboa, 2003, p. 25-39. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Ponte,%20J.P.%20Investigar,%20Ensinar%20e%200aprender.pdf>. Acesso em 01 jul. 2016.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in the teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

_____. Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

THIOLLENT, M. **Metodologia da Pesquisa-Ação**. São Paulo: Cortez, 1985.