Método de Newton para resolução de sistemas não lineares: uma abordagem gráfica no software GeoGebra

Newton method for solving nonlinear systems: a graphical approach to software GeoGebra

Isaias Guilherme de Souza Boruch[1]

Dirceu Scaldelai[2]

Resumo

O presente trabalho busca apresentar um objeto de aprendizagem, implementado no software GeoGebra, o qual possui por objetivo principal resolver sistemas de equações não lineares utilizando o método iterativo de Newton. O objeto enfatiza a visualização gráfica da sequência de soluções obtidas com a aplicação do método proposto, além do comparativo entre as soluções exatas e as decorrentes da aplicação do método. Sua utilização permite que verifiquem-se características do método iterativo de Newton numa abordagem gráfica, proporcionando o ensino do método com maior clareza.

Palavras-chave: Sistemas de equações não lineares. Método de Newton. GeoGebra.

Linha temática: Tecnologia Educacional.

1. Introdução

Na modelagem de problemas reais é comum que haja a necessidade de se obter a solução de sistemas de equações não lineares. Contudo, a resolução destes geralmente só é viável se realizada por um método iterativo e o método mais conhecido e amplamente estudado para tal é o Método de Newton.

Quando o método iterativo de Newton para resolução de sistemas não lineares é abordado nas disciplinas de cálculo numérico, geralmente o professor utiliza-se de exemplos de sistemas de ordem dois ou três. Dessa forma, o apelo gráfico pode ser utilizado como um intensificador no processo de compreensão do

[1] Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Campus União da Vitória, isaias_boruch@hotmail.com.
[2] Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, professor assistente A, Universidade Estadual do Paraná – Campus União da Vitória, dirceuscaldelai@gmail.com.

algoritmo do método citado. Isso porque, segundo Barbosa (2009), podemos considerar a abordagem visual de um conceito matemático como um novo modo, ou estilo, de produção do conhecimento.

Nesta perspectiva, com o presente trabalho busca-se apresentar os resultados de um projeto de iniciação científica, o qual tem como um dos objetivos implementar no *software GeoGebra* o algoritmo do método iterativo de Newton para solução de sistemas de equações não lineares, afim de gerar um objeto de aprendizagem denominado "*Método iterativo de Newton para resolução de sistemas não lineares*"[3]. O objeto possibilita a visualização gráfica da sequência de soluções obtidas a cada iteração do método proposto, bem como a bacia de atração das raízes em determinada região do plano xy e a comparação entre a solução exata e a solução obtida a partir da aplicação do método. Tais possibilidades permitem que se verifiquem características do método iterativo de Newton, tais como, por exemplo, sua natureza caótica.

2. Tecnologias digitais e visualização: ferramentas importantes no processo de ensino

No campo da educação matemática podemos definir visualização como o processo de formação de imagens, o qual pode ocorrer mentalmente, com lápis e papel ou com o auxílio de tecnologias digitais, por exemplo. Segundo Zimmermann e Cunningham (1991, apud FLORES, WAGNER e BURATTO, 2012, p. 34) a formação dessas imagens é instrumento eficaz para a descoberta e compreensão da matemática. Além disso, tal ação é a base para o desenvolvimento inicial do pensamento matemático (Brasil, 1998).

Autores como Borba, Malheiros e Zulatto (2008) defendem que o uso de tecnologias digitais, em especial o computador, auxiliam e potencializam o

[3] Referência. Disponível no endereço: <https://www.geogebra.org/m/tnJCe6Bn>.

processo de visualização, uma vez que podem ser usados “para testar conjecturas, para calcular e para decidir questões que tem informações visuais como ponto de partida”. (Borba, Malheiros e Zulatto, 2008, p.68).

Dessa forma, as tecnologias digitais são importantes ferramentas na construção do conhecimento por parte dos alunos. (Bittar, Guimarães e Vasconcellos, 2008). As diretrizes Curriculares do Estado do Paraná também defendem seu uso, visto que os mesmos:

> [...] tem auxiliado estudantes e professores a visualizarem, generalizarem e representarem o fazer matemático de uma maneira possível de manipulação, pois permitem construção, interação, trabalho colaborativo, processo de descoberta de forma dinâmica e confronto entre teoria e prática. (PARANÁ, 2006, p.44)

Uma das maneiras mais utilizadas por professores para incorporar as tecnologias digitais em sala de aula é a utilização de *softwares*. Farias (2007) nos conta que a utilização destes em um contexto educacional é de grande importância, visto que eles funcionam:

> [...] como um importante auxílio em termos de ensino e aprendizagem em um contexto educacional para o ensino da Matemática, possibilitando meios de informação visual, simulações, nos quais (...) é possível representar e interagir com modelos cujo procedimento é por vezes complexo, o que seria certamente difícil realiza-lo de madeira manipulativa. (FARIAS, 2007, p.52-53).

Nessa perspectiva, podemos afirmar que os *softwares* educativos assumem importante papel no processo de ensino-aprendizagem, visto que tal tecnologia proporciona, além da visualização, “a oportunidade de explorar ideias matemáticas, analisar exemplos e contra exemplos” (BORBA e VILLARREAL, 2005, apud FARIAS, 2007, p.60).

Tendo em vista o exposto, a visualização e os *softwares* educativos assumem importantes papeis nos procedimentos de construção do conhecimento matemático, formulação de conjecturas, análises de resultados e formalização de conceitos.

Atualmente, um dos *softwares* educativos voltado a matemática que tem se destacado por sua dinamicidade, facilidade de construção de objetos e formas de visualização é o GeoGebra.

3. O software GeoGebra

O GeoGebra, aglutinação das palavras **Geo**metria e Ál**gebra**, é um *software* de Matemática dinâmica, livre e gratuito, que combina álgebra, gráficos, geometria, tabelas, cálculos e estatística. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter principalmente para o ensino e aprendizagem de Matemática (Procópio, 2011). O projeto se iniciou na Universidade de Salzburg e segue em desenvolvimento na Florida Atlantic University, além de ser traduzido para inúmeros idiomas, inclusive o Português (Scaldelai, 2014).

O *software* permite a construção de pontos, vetores, segmentos, funções, cônicas e outros objetos matemáticos, além de sua manipulação dinâmica que pode ser realizada, por exemplo, clicando-se nesses itens e arrastando-os para qualquer posição desejada (Pelli, 2014), ou ainda, alterando as coordenadas de cada objeto.

As principais formas de visualização disponíveis no *software* são a *Janela de Visualização* (onde são exibidos elementos de duas dimensões como retas, curvas e gráficos de funções de uma variável), *Janela 3D* (onde são exibidos elementos de três dimensões, como planos, sólidos geométricos e gráficos de funções de duas variáveis), *Planilha de Cálculos* (onde podem ser explorados dados e conceitos estatísticos), *Janela CAS* (que permite cálculos numéricos e simbólicos) e *Janela de Álgebra* (que proporciona, por exemplo, a visualização de coordenadas de pontos, equações e funções). Procópio (2011, p. 69) nos diz que “todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.” A *figura 1* mostra as janelas de visualização do *software*:

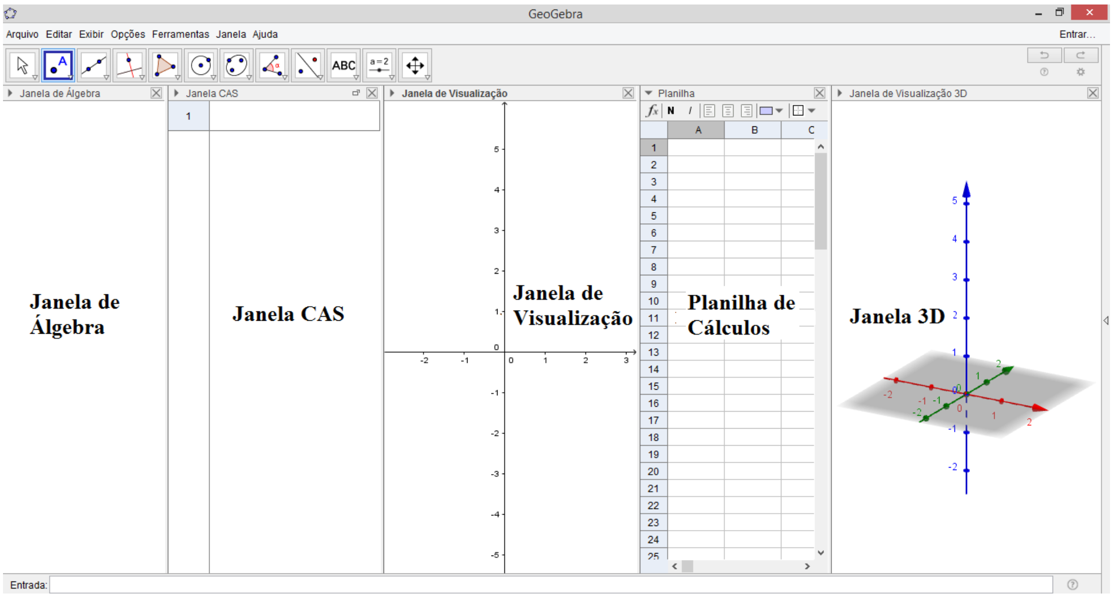

Figura 1: As formas de visualização no software GeoGebra.
Fonte: Os autores.

4. Sistemas de equações não lineares

Na modelagem de problemas reais é comum que haja a necessidade de se obter a solução de sistemas de equações não lineares. Segundo Ruggiero e Lopes (1996), tais sistemas são definidos como o conjunto de equações

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \rightarrow F(x) = 0 \qquad (1)$$

onde $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ e $f_1, f_2, \dots, f_n$ são funções não lineares de n variáveis, ou seja, $F(x)$ é uma função vetorial com $x \in R^n$.

Determinar a solução de um sistema não linear significa encontrar um vetor x que satisfaz todas as equações de (1) simultaneamente. Tal solução, caso exista, é a intersecção das superfícies determinadas pelas funções f_i. Segundo

Souza (2015), raramente encontra-se a solução exata de sistemas de equações não lineares e, em geral, só é possível obter soluções aproximadas utilizando métodos iterativos.

Os métodos iterativos podem ser considerados como métodos de aproximações sucessivas, sendo que cada nova aproximação é obtida a partir da aproximação anterior por meio de um algoritmo conhecido, de modo que se pretende tornar cada vez menor o erro de aproximação entre a solução gerada pelas iterações e a solução real do problema.

Dessa forma, os métodos iterativos geram uma sequência de vetores solução que em condições ideais convergem para uma das soluções do sistema de equações, caso ela exista.

O método iterativo mais conhecido e amplamente estudado para resolução de sistemas de equações não lineares é o método de Newton, que consiste, basicamente, em construir um modelo local linear, partindo das derivadas parciais da função f_i (Ruggiero e Lopes, 1996).

5. O Método iterativo de Newton para resolução de sistemas de equações não lineares

De acordo com Ruggiero e Lopes, (1996), sendo x a solução do sistema não linear descrito em (1) e $x^k \in \mathbb{R}^n$ uma aproximação inicial de x, sabe-se que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists c_i \in \mathbb{R}^n$ de modo que:

$$f_i(x) = f_i(x^k) + \nabla f_i(c_i)^t (x - x^k) i = 1, \dots, n \quad (2)$$

sendo que $\nabla f_i(c_i)$ é o vetor gradiente de f_i no ponto c_i, dado por:

$$\nabla f_i(c_i) = \left(\frac{\partial f_i(c_i)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(c_i)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i(c_i)}{\partial x_n} \right)^t$$

Aproximando $\nabla f_i(c_i)$ por $\nabla f_i(x^k), i = 1, \dots, n$, temos um modelo local linear para $f_i(x)$ em torno de x^k. Dessa forma, (2) pode ser reescrito como:

$$f_i(c_i) \approx f_i(x^k) + \nabla f_i(x^k)^t (x - x^k) i = 1, \dots, n \tag{3}$$

Considerando as n equações não lineares definidas em (3), a união destas resulta no modelo local linear para $F(x)$ em torno de x^k, definido por:

$$F(x) \approx M_k = F(x^k) + J(x^k)(x - x^k) \tag{4}$$

sendo $J(x^k)$ matriz das derivadas parciais de $F(x)$,denominada *matriz Jacobiana*, definida por:

$$J(x^k) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x^k)^t \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a nova aproximação x^{k+1} da solução x será o zero do modelo local linear definido por (4). Portanto:

$$M_k = 0 \Leftrightarrow J(x^k)(x - x^k) = -F(x^k) \tag{5}$$

Sendo $s^k = x - x^k$, onde s^k é a solução do sistema linear:

$$J(x^k)s^k = -F(x^k) \tag{6}$$

Logo, a nova aproximação de x será:

$$x^{k+1} = x^k + s^k \tag{7}$$

Tomando $\vec{v} = x^{k+1} - x^k$, o método de Newton converge para uma solução x se $\|\vec{v}\| < \varepsilon_1$, com ε_1 sendo o erro de aproximação. Pode-se ainda verificar a convergência avaliando se $\|F(x)\|_\infty$ for suficientemente próxima de zero, onde $\|F(x)\|_\infty = máx_{1 \le i \le n} |v_i|$.

Dessa forma, método de Newton consiste, basicamente, na resolução dos sistemas lineares decorrentes de (6) (Ruggiero e Lopes, 1996).

6. O objeto de aprendizagem

Segundo Koper (2003, apud SABBATINI, 2012, p. 4), um objeto de aprendizagem pode ser considerado como “qualquer recurso digital, reprodutível e ‘referenciável’, utilizado em atividades de aprendizagem ou de apoio à aprendizagem, disponível para que outras pessoas o utilizem”. Sendo assim, a construção do objeto de aprendizagem “*Método iterativo de Newton para resolução de sistemas não lineares*” se deu com intuito de oferecer a seu operador a visualização do comportamento do vetor solução gerado pelo método de Newton para resolução de sistemas de equações não lineares de ordem $2x2$. Para tal, criou-se a ferramenta denominada “*Sistemas Não Lineares*”, a qual calcula o valor numérico da matriz Jacobiana das funções f_i no ponto x^k, resolve o sistema linear definido por (6) pelo método da multiplicação pela matriz inversa de $J(x^k)$, calcula a solução x^{k+1} definida por (7) e gera a sequência de vetores solução do método.

O *software* foi programado para que represente as equações do sistema no Plano Cartesiano e marque as interseções entre as curvas formadas, ou seja, represente as soluções exatas do sistema. Assim, é possível verificar se a sequência de vetores solução gerada converge ou não para uma das soluções exatas do sistema. Outra possibilidade é a comparação entre a solução gerada pelo método iterativo e a solução exata.

Além da visualização da sequência de vetores solução gerada pelo método, o objeto também permite a visualização do conjunto de pontos, que sendo considerados como aproximação inicial, convergem para determinada solução. O conjunto de tais pontos é denominado *bacia de atração* das raízes e, no objeto, é delimitado por uma região retangular do plano xy.

O objeto permite alterar o sistema de equações, a estimativa inicial de solução do problema, a região da bacia de atração, o incremento dos pontos da bacia de atração e o erro de aproximação considerado aceitável, possibilidades que conferem dinamicidade ao objeto.

A figura 2 mostra a sequência de vetores solução do sistema não linear

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 6 = 0 \\ 5x^3 + y^3 - 11 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

com estimativa inicial de solução $x = (2.5{,}0.5)$ e a bacia de atração de suas raízes, considerando a região do plano xy: $S = \{(x, y) \vee -2.5 \leq x \leq 2.5, -2.5 \leq y \leq 2.5\}$:

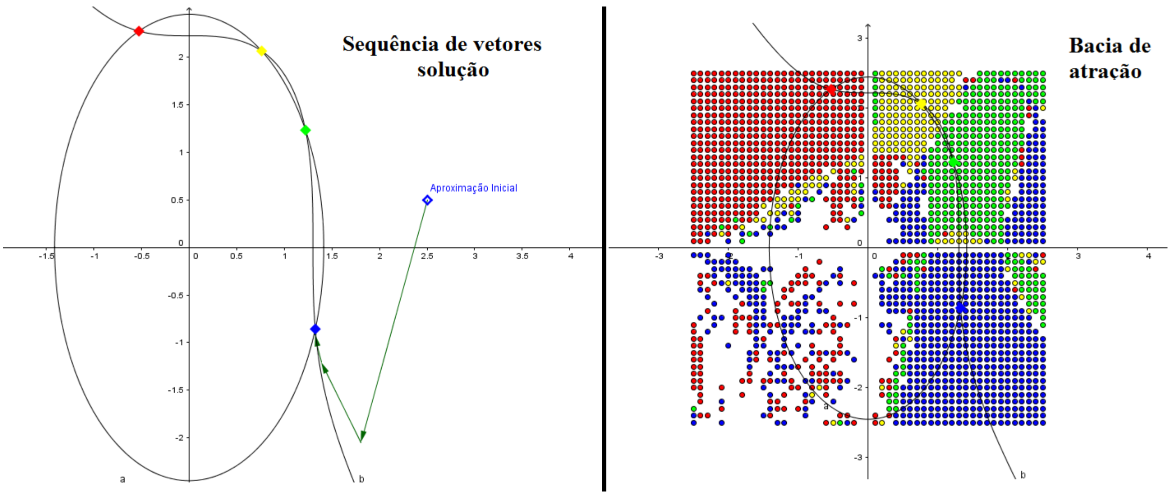

Figura 2: Sequência de vetores solução e bacia de atração no software GeoGebra.
Fonte: Os autores.

7. Discussão

O objeto apresenta características as quais permitem que o mesmo torne-se uma ferramenta eficaz para seu operador na formulação de conjecturas e fixação de conceitos relacionados ao método iterativo de Newton, visto que a visualização por ele proporcionada pode tornar-se grande aliada no processo de ensino e aprendizagem. No entanto, cabe ressaltar que o objeto resolve sistemas de equações de ordem $2x2$, limitando $x \in \mathbb{R}^2$. Isso, pois, o processo de visualização da sequência de vetores solução e, principalmente, da bacia de atração das raízes é complexo quando utilizamos $x \in \mathbb{R}^3$ e impossível quando consideramos dimensões maiores do que três, sendo estas limitações do objeto.

Ao gerar no objeto a bacia de atração das raízes de um sistema não linear é possível observar que podem existir pontos os quais, quando utilizados como aproximação inicial da solução do sistema, não convergem para as soluções exatas ou não atendem a precisão desejada. Tais pontos não são representados no conjunto bacia de atração, fazendo com que existam espaços vazios no conjunto, o que pode ser verificado na *figura 2*. Dessa forma, é possível concluir que a escolha da aproximação inicial interfere na convergência do método.

Autores como Souza (2015) e Santos (1993) afirmam que para a sequência de vetores solução convergir para determinada raiz do sistema basta que a estimativa inicial esteja suficientemente próxima a esta raiz. Contudo, não há especificações sobre o quão próxima da raiz deva estar tal estimativa para que haja a convergência. Considerando o exposto, o objeto permite, por meio da bacia de atração, que se visualize o fato de não ser possível realizar tal especificação, visto que a proximidade entre estimativa inicial e a raiz exata não garante sequer a convergência do método para uma das soluções. Também é possível observar que quando há a convergência para uma das raízes, nem sempre essa é a que se encontra mais próxima da estimativa inicial. Tal fato também pode ser observado na *figura 2*.

Considerando os fatos acima citados e a dinamicidade que o objeto oferece a seu operador, sua utilização permite que se verifique a natureza caótica do método iterativo de Newton citada por Santos (1993), uma vez que uma pequena alteração em um parâmetro da estimativa inicial pode mudar completamente o resultado final da aplicação do método. Tal verificação é possível principalmente ao se construir a bacia de atração das raízes do sistema de equações.

Outra característica relacionada ao método iterativo de Newton é a de que quando o método apresenta convergência para uma das raízes, esta obedece taxa quadrática (Ruggiero e Lopes, 1996). Tal característica é nítida ao se observar a sequência de vetores solução gerada no objeto pelo método.

8. Considerações finais

Durante a apresentação de considerações sobre o uso das tecnologias digitais e a visualização no processo de ensino tornou-se evidente a importância da utilização dos mesmos em um contexto escolar, visto que, entre outras contribuições, os mesmos auxiliam na compreensão e construção do conhecimento matemático.

Entre as várias formas de se utilizar as tecnologias digitais em sala de aula, uma das que tem se destacado é a por meio de softwares educativos, pois os mesmos oferecem, além da visualização de objetos matemáticos e processos, a possibilidade de comparação e análise de resultados, formulação de conjecturas e formalização de conceitos.

Ao avaliarmos os *softwares* educativos de matemática, o GeoGebra tem se destacado por sua dinamicidade e facilidade de construção, além de ser um software livre e gratuito. Dessa forma, o mesmo apresentou-se como ideal para a construção do objeto de aprendizagem proposto.

A principal característica do objeto construído está relacionada a dinamicidade ofertada a seu operador e, mesmo existindo limitações do objeto no que diz respeito a visualização, tal característica permite que se verifiquem particularidades do método de Newton para resolução de sistemas não lineares, como, por exemplo, sua natureza caótica.

Por final, cabe ressaltar que o objeto será utilizado com acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática durante aulas de cálculo numérico, com intuito de se verificar a efetividade de suas potencialidades no processo de ensino-aprendizagem.

Referências

BARBOSA, Sandra Malta. **Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia.** 2009. 199f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

BITTAR, Marilena; GUIMARÃES, Sheila Denize; VASCONCELLOS, Mônica; A integração da tecnologia na prática do professor que ensina matemática na educação básica: uma proposta de pesquisa-ação. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.8, p.84-94, UFSC: 2008.

BORBA, Marcelo de Carvalho; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos; ZULATTO, Rúbia Barcelos Amaral; **Educação a Distância On-Line**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mónica Ester; **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation. USA: Springer, pp.78-100, 2005.

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC, 1997.

FARIAS, Maria Margarete do Rosário; **As Representações Matemáticas Mediadas por Softwares Educativos em uma Perspectiva Semiótica**: Uma Contribuição Para o Conhecimento do Futuro Professor de Matemática. 2007. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2007.

FLORES, Claudia Regina; WAGNER, Débora Regina; BURATO, Ivone Catarina Freitas; **Pesquisa em Visualização na Educação Matemática**: Conceitos, Tendências e Perspectivas. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.14, n.1, p. 31-45, 2012.

GEOGEBRA: *Dynamic Mathematics for Everyone*, Version 5.0.214.0-3D, 2016. http://www.geogebra.org/.

KOPER, Rob. Combining re-usable learning resources to pedagogical purposeful units of learning. In: LITTLEJOHN, Allison (ed.). **Reusing online resources**: a sustainable approach to eLearning. Londres: Kogan Page, 2003.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná**: Matemática. Curitiba: SEED-PR; Imprensa oficial, 2006.

PELLI, Débora. **As Contribuições do Software GeoGebra Como um Mediador do Processo de Aprendizagem da Geometria Plana na Educação a Distância (EAD) em um Curso de Licenciatura em Pedagogia.** 2014. 242 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Outro Preto, 2014.

PROCÓPIO, Wadames. **O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo**: sugestões de atividades com o uso do GeoGebra. 2011. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2011.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico**: Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª edição. São Paulo: Editora Pearson Makron Books, 1996.

SABBATINI, Marcelo. Reflexões Críticas Sobre o Conceito de Objeto de Aprendizagem Aplicado ao Ensino de Ciências e Matemática. **Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 3, n. 3, p. 1-36. 2012.

SANTOS, Lúcio Tunes dos. 1993. Sistemas não Lineares e Fractais. **Matemática Universitária**, 15, 102-116, 1993.

SCALDELAI, Dirceu; **O Software GeoGebra.** In: BASNIAK, Maria Ivete; ESTEVAM, Everton José Goldoni; (Org.). **O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica**: Frações, Estatística, Círculo e Circunferência. Curitiba: Íthala, 2014. p. 13-23.

SOUZA, Elienai Alvez de; **Métodos Iterativos para Problemas Não Lineares.** 2015. 123 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia). Universidade Federal Fluminense. Volta Redonda, 2015.

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve. Editors´ Introduction: What is Mathematical Visualization? In: ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve; (Eds.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**. Washington: MAA, 1991.