O Princípio de Cavalieri: numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais

Cavalieri's principle: an approach supported by current technologies

Polyana Benk[1]

Sérgio Marconi da Silva[2]

Elisandra Bar de Figueiredo[3]

Ivanete Zuchi Siple [4]

Resumo

Os processos de ensino e aprendizagem da matemática podem se beneficiar dos avanços tecnológicos. Dentre as diversas tecnologias trazemos nesse artigo as potencialidades do GeoGebra e da impressora 3D para abordar o volume da esfera por meio do princípio de Cavalieri, tanto no Ensino Básico quanto no Superior.

Palavras-chave: Volume da esfera. Princípio de Cavalieri. Impressora 3D. GeoGebra.

Linha Temática: Tecnologia Educacional.

1 Introdução

Há tempos matemáticos estudam a esfera e suas propriedades. Arquimedes (287-212 a.C.) foi um dos primeiros a deduzir o seu volume. No século XVII, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) estabeleceu um método para determinar volumes (e áreas) conhecido como princípio de Cavalieri e, no século XIX, Bernard Riemann (1826-1866), propôs as somas de Riemann e a integral de Riemann, pelos quais também pode-se obter uma expressão para o cálculo do volume da esfera (EVES, 2004).

[1] Graduanda em Licenciatura em Matemática – UDESC/JOINVILLE - polybenk04@gmail.com

[2] Graduando em Engenharia de Produção – UDESC/JOINVILLE - uaimarconi@gmail.com

[3] Professora do Departamento de Matemática e do PROFMAT – UDESC/JOINVILLE - elis.b.figueiredo@gmail.com

[4] Professora do PPGECMT – Departamento de Matemática – UDESC/JOINVILLE – ivazuchi@gmail.com

De acordo Knill e Slavkovsk (2013), boa parte do sucesso de Arquimedes, na Matemática, pode ser atribuído ao fato de que ele perseguia métodos e soluções a partir de construções mecânicas, ou seja, buscava resolver os problemas de forma prática antes de propor demonstrações teóricas. Slavkovsky (2012) enfatiza que, hoje, Arquimedes seria um grande fã das impressoras 3D, pelas potencialidades oferecidas por essa tecnologia nas construções físicas de objetos.

Apesar da impressão 3D ser uma tecnologia recente, se comparada aos métodos gregos, a representação de objetos 3D não é privilégio dos tempos atuais conforme exemplifica SLAVKOVSKY (2012, p. 4, tradução nossa):

> Educadores têm usado modelos tridimensionais elaborados com diferentes materiais por séculos. Por exemplo, a tradução para o inglês de Sir Henry Billingsley de Os Elementos de Euclides inclui objetos dobrados feitos de papel para auxiliar na demonstração de objetos tridimensionais.

No que diz respeito aos objetos tridimensionais, estamos propondo explorar o volume da esfera, resgatando as contribuições históricas e utilizando as tecnologias atuais. Assim, abordamos o volume da esfera usando o princípio de Cavalieri que pode ser explorado tanto no Ensino Básico quanto no Superior.

2 Contexto histórico

Bonaventura Cavalieri nasceu em 1598 em Milão na Itália, foi membro de uma ordem religiosa (os jesuados) aos quinze anos de idade. Cavalieri tornou-se aluno de Galileu e mais tarde professor de matemática na Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte (EVES, 2004).

Em 1635 Cavalieri apresentou a primeira versão do livro *Geometria indivisibilibus continuorum* em que apresenta sua teoria dos indivisíveis, Eves (2004) diz que o método de Cavalieri tem raízes que remontam a Demócrito (460-370 a.C.) e Arquimedes, mas sua motivação direta seja, talvez, as tentativas de Kepler (1571-1630) de encontrar certas áreas e volumes.

Segundo Eves, os princípios de Cavalieri são assim enunciados:

> 1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
>
> 2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. (EVES, 2004, p. 426)

Numa linguagem mais simples, o princípio de Cavalieri, para o volume, diz que dois sólidos com mesma altura terão o mesmo volume, se as seções planas numa mesma altura têm a mesma área, como ilustra a Figura 1.

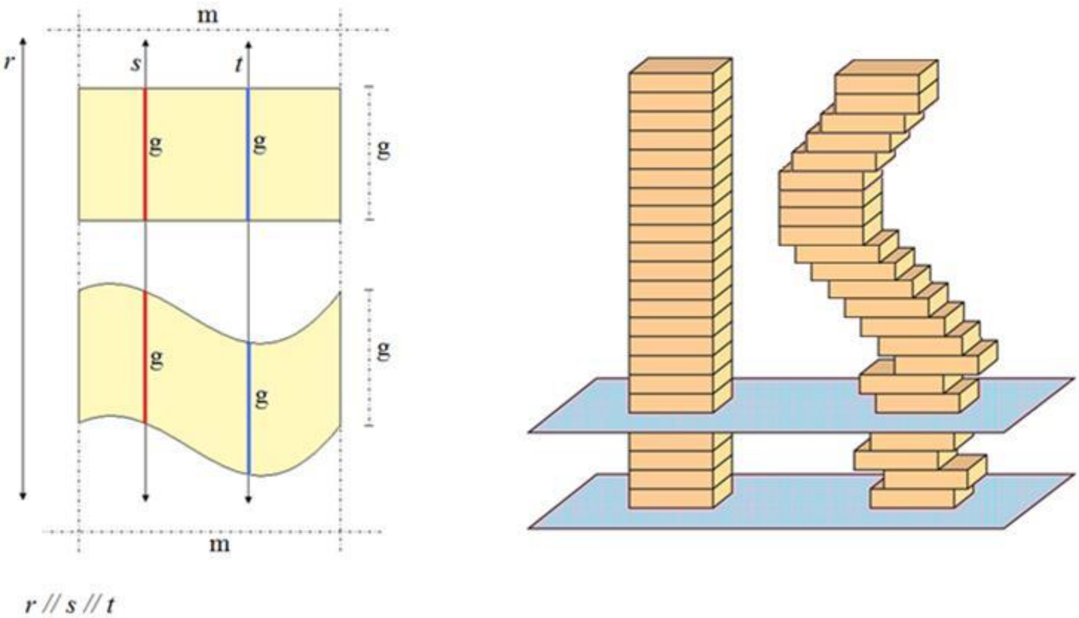


Figura 1: Princípio de Cavalieri. Fonte: WEIGEL, 2010.

Segundo Boyer (1993) as definições feitas por Cavalieri não foram utilizadas em suas pesquisas de astronomia e óptica, porém, ele se antecipou ao Cálculo Integral que seria usado muito depois, pois, “ele dividia uma área ou um volume em um número finito de porções n, e então fazia n tender ao infinito.” (BOYER, 1993, p. 35). Esses princípios podem ser explorados atualmente na abordagem de áreas e volumes, tanto no Ensino Básico quanto no Superior. Aqui, exploraremos esse princípio no cálculo do volume da esfera.

3 O princípio de Cavalieri no cálculo do volume da esfera

Para determinar o volume da esfera vamos construir um sólido que satisfaça o princípio de Cavalieri e cujo volume seja conhecido. Considere um cilindro equilátero com raio da base R e seja S o ponto médio do eixo do cilindro. Seja ainda um cone de duas folhas cujas bases são as bases do cilindro e S como vértice comum. Esse cone é chamado clépsidra e o sólido que está dentro do cilindro e fora da clépsidra é chamado chamada anticlépsidra e está representada na Figura 2.

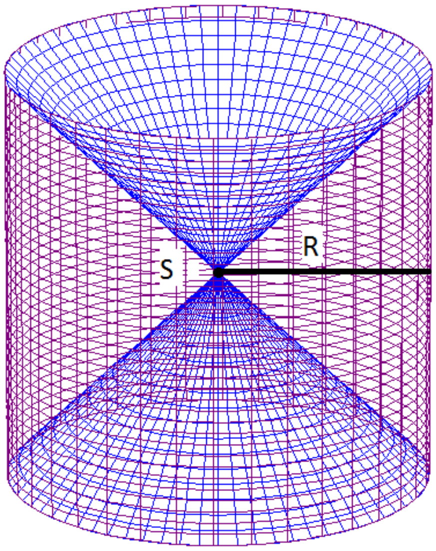


Figura 2: Anticlépsidra. Fonte: produção dos autores, 2016.

Vamos mostrar que a anticlépsidra, formada a partir do cone de raio e altura R, e a esfera, de raio R, cortadas a uma mesma altura h, como ilustra a Figura 3, tem seções de mesma área e então, pelo princípio de Cavalieri, chegaremos ao volume da esfera a partir do volume da anticlépsidra.

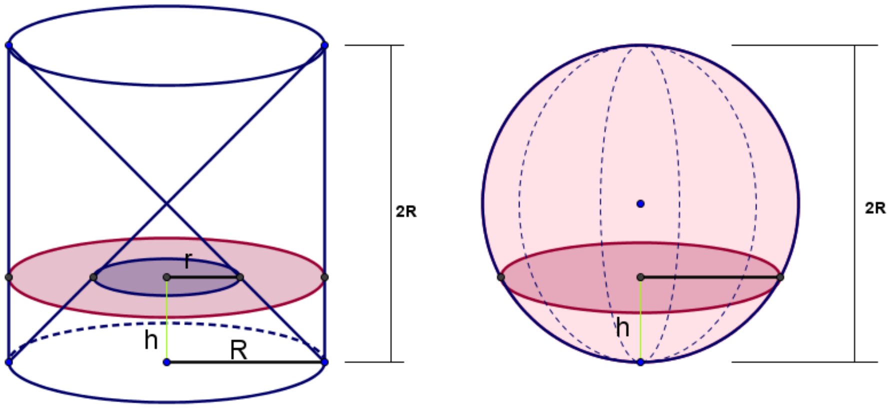


Figura 3: Corte em uma altura h. Fonte: produção dos autores, 2016.

Da geometria plana, temos que a área do círculo é dada por $A(c) = \pi r^2$, assim utilizando a relação de Pitágoras obtemos a relação para o raio da seção N da esfera

$$r^2 = R^2 - h^2.$$

Logo, a área da seção esférica é:

$$A(c) = \pi(R^2 - h^2)$$

Agora, para a área da seção da anticlépsidra, temos a área de uma coroa circular, que é dada pela diferença das áreas dos círculos maior M e menor m, $A(a) = \pi R^2 - \pi h^2$, como ilustra a Figura 4.

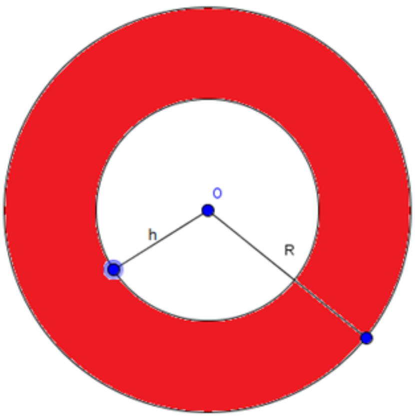


Figura 4: Coroa Circular. Fonte: produção dos autores, 2016.

Como as áreas das seções da esfera e da anticlépsidra são equivalentes em qualquer altura, então, pelo princípio de Cavalieri, os sólidos têm o mesmo volume.

4 Modelo impresso na Impressora 3D

Na nossa instituição temos a impressora Cliever CL1[5] de fabricação nacional que usa o polímero PLA (poliácido láctico). Essa é uma impressora de custo relativamente baixo, de uso fácil e tem o software próprio, Cliever Studio, que faz a comunicação entre a impressora e o computador. Ela foi adquirida pelo grupo de pesquisa PEMSA[6] com o objetivo de produzir materiais para o Ensino Básico e Superior. Nesse trabalho apresentamos uma esfera e uma anticlépsidra cortadas por um plano (conforme Figura 5) modeladas para auxiliar explorar a demonstração do volume da esfera usando o princípio de Cavalieri no Ensino Básico e Superior. Os sólidos utilizados nesse trabalho, pelas suas características, foram todos gerados como sólidos de revolução, utilizando-se, inicialmente, um desenho feito no AutoCad 2D e transformando-o em um desenho tridimensional, a partir da rotação em torno de um eixo vertical, utilizando os recursos de modelagem 3D do AutoCad[7].

Slavkovsky (2012) explora os benefícios do uso da impressora 3D nas salas de aula de matemática, destacando a possibilidade da manipulação tátil do objeto físico, o estímulo no aprendizado de novos recursos tecnológicos e na disponbilidade de inúmeros objetos modelados gratuitos disponíveis para download na internet, os quais podem ser utilizados e/ou adaptados nos processos de ensino e aprendizagem.

Apostando nos benefícios das tecnologias 3D nos processos de ensino e aprendizagem, esperamos que essa maquete possibilite explorar o princípio de

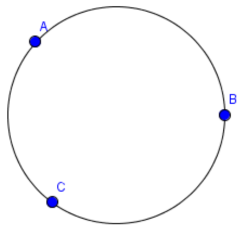
[5] http://www.cliever.com.br/produto/impressora-3d-cliever-cl1-1
[6] Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino
[7] http://www.autodesk.com/products/3ds-max/

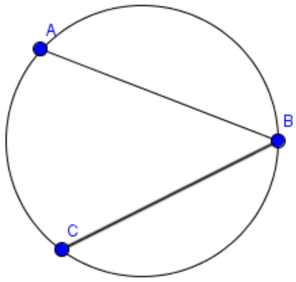
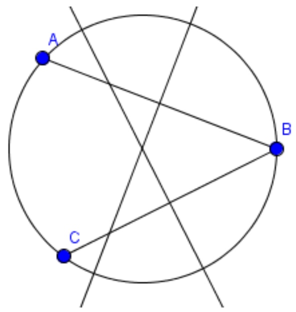
Cavalieri em sala de aula para um ensino diferenciado do volume da esfera, tornando o conteúdo mais intuitivo e tátil. Nossa proposta é que os alunos possam verificar as hipóteses do princípio de Cavalieri manipulando os objetos impressos e calculando as áreas das seções.

Figura7: Anticlépsidra e esfera seccionadas. Fonte: Produção dos autores, 2016.

Para utilizar a maquete impressa e calcular a área das seções, precisamos de algumas noções básicas uma delas é encontrar o centro de uma circunferência. O Quadro 1 descreve o passo a passo dessa tarefa.

Quadro 1: Como encontrar o centro de uma circunferência.

Passo a passo	Ilustração
1. Marcamos três pontos A, B e C na circunferência.	

2. Traçamos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$	
3. Traçamos as mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. O ponto de interseção dessas retas é o centro O da circunferência.	

Fonte: produção do autor, 2016.

Agora precisamos medir os raios das circunferências: no nosso caso o raio da seção da esfera é R= 4,72 cm, o raio do círculo maior da seção da anticlépsidra é r= 6 cm e o raio do círculo menor é h= 3,7 cm.

Então, pela relação obtida na seção 2, temos que a área do círculo da seção da esfera é:

$$A(c) = \pi * 4{,}72^2 = 22{,}2784\pi \text{ cm}^2$$

e a área da coroa circular da anticlépsidra é:

$$A(a) = \pi * 6^2 - \pi * 3{,}7^2 = 22{,}31\pi \text{ cm}^2.$$

Observamos que as áreas das seções são aproximadamente iguais e, pelo princípio de Cavalieri, seus volumes também serão iguais. Experimentalmente trabalhamos com resultados aproximados, visto que podem ocorrer erros de precisão dos equipamentos de medida e contração dos materiais.

Como o modelo 3D é estático, podemos verificar a validade do princípio de Cavalieri em apenas um corte estabelecido na hora da impressão do modelo, assim essa é uma das limitações da tecnologia da impressão 3D. Assim, para complementar construímos o modelo também no GeoGebra que possibilita explorar e simular dinamicamente o modelo.

5 Princípio de Cavalieri no Geogebra

A limitação da maquete física nos motivou a implementar um objeto de aprendizagem (OA)[8] no GeoGebra que permite verificar as hipóteses do princípio de Cavalieri numa esfera de raio R e uma anticlépsidra de raio R e altura $2R$, com R variando no intervalo de zero até cinco. A dinâmica do GeoGebra possibilita uma visualização diferenciada do problema, conectando as representações gráficas e numéricas ilustrando que as áreas são equivalentes, independente do R e da altura h que tomemos.

O objeto construído é de fácil manipulação, bastando mover o controle deslizante h, visualizando as áreas equivalentes das seções. Quando o controle deslizante R é movido, o tamanho dos nossos sólidos é alterado, mostrando que não importa o tamanho da esfera e da anticlépsidra, o princípio de Cavalieri é válido, como ilustrado nas Figuras 6 e 7.

[8] Adaptado de THAYNAN e CUNHA, (2015).

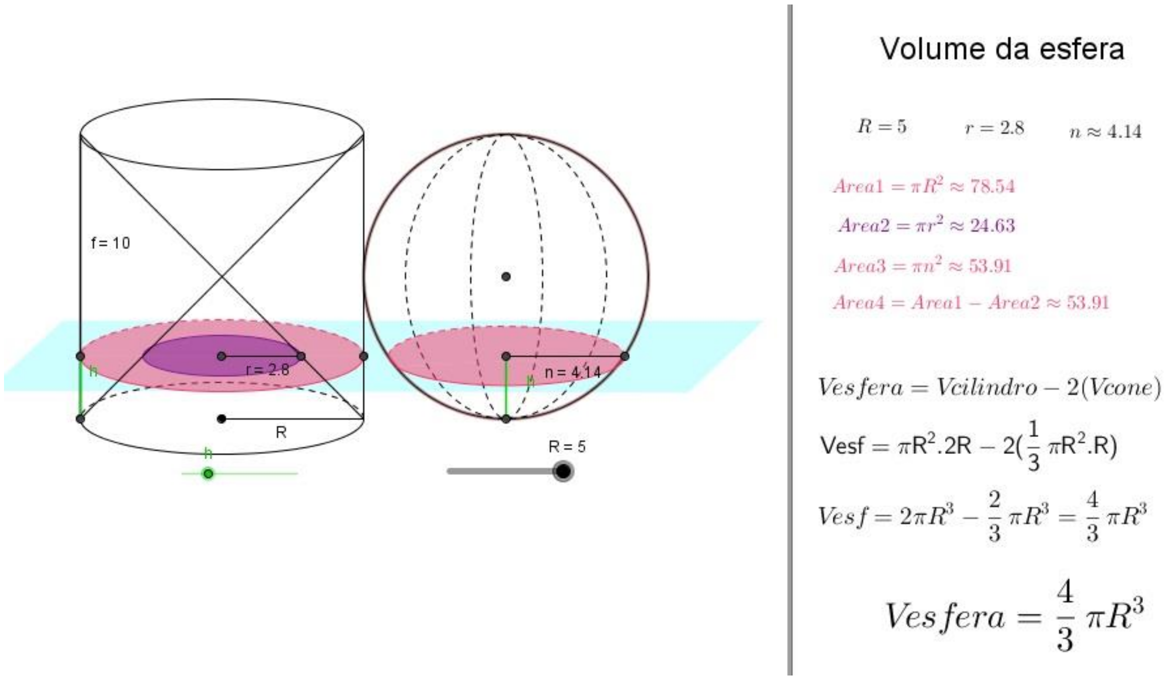


Figura 6: Principio de Cavalieri com R=5. Fonte: produção dos autores, 2016.

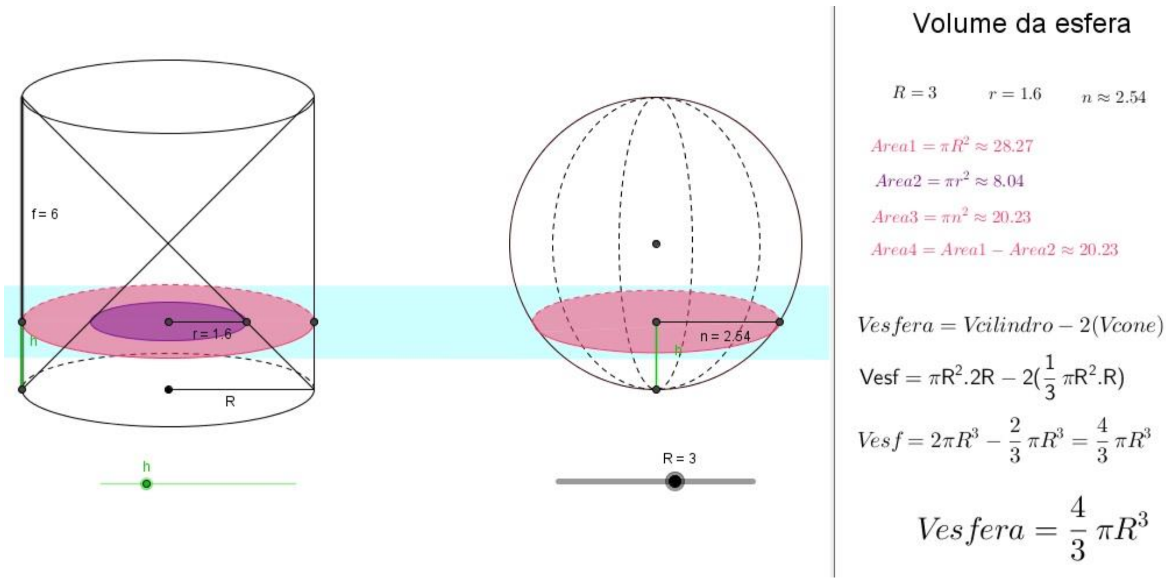


Figura 7: Principio de Cavalieri com R=3. Fonte: produção dos autores, 2016.

6 Considerações finais

Com esses dois objetos, a maquete impressa na impressora 3D e o objeto de aprendizagem implementado no GeoGebra, podemos mostrar aos alunos como chegar ao volume de uma esfera utilizando o princípio de Cavalieri, de uma maneira que pode ser muito construtiva e interessante, pois possibilita ao professor abordar um modelo estático e físico que mostra a realidade do problema e um modelo dinâmico e computacional que mostra o princípio de Cavalieri em muitas esferas.

A utilização da impressão 3D na construção física de objetos matemáticos e das potencialidades dinâmicas do GeoGebra, apresenta-se como uma possibilidade de inovação bastante promissora a ser utilizada nos processos de ensino e aprendizagem de disciplinas que exigem representações gráficas tridimensionais, tais como Geometria, Geometria Analítica e Cálculo.

A existência de inúmeros objetos gratuitos disponíveis para download na internet, como por exemplo o site Thingiverse[9] e o fórum do GeoGebra[10] também é facilitador para docentes e discentes que podem propor aplicações em sala de aula, utilizando e ou adaptando tais objetos.

Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESC - Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina pelo apoio financeiro, ao Grupo de Pesquisa PEMSA - Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino e a UDESC pelas bolsas de iniciação científica.

[9] http://www.thingiverse.com/
[10] https://www.geogebra.org/materials/

Referências

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide - 2a ed. - São Paulo: Blücher, 1996.

BOYER, Carl B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**: cálculo, tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual editora LTDA, 1993.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, tradução Higyno H. Domingues, Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

KNILL, Oliver & SLAVKOVSKY, Elizabeth. **Thinking like Archimedes with a 3D printer**. Harvard University, 2013. Disponível em: < http://www.math.harvard.edu/~knill/3dprinter/documents/paper.pdf>. Acesso em 30/09/2016.

LIMA, Francisco do Nascimento. **Estudo sobre o cálculo de áreas e volumes utilizando o método de exaustão e o princípio de Cavalieri** (Trabalho de Conclusão de Curso). João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2013.

LULA, Kariton Pereira. **Aplicações do princípio de Cavalieri ao cálculo de volumes e áreas** (Dissertação) Goiânia: Universidade Federal de Goiás, 2013.

MEDEIROS, Leonardo Andrade. **Área e volume da esfera** (Dissertação). Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014.

SLAVKOVSKY, Elizabeth Ann**. Feasibility Study For Teaching Geometry and Other Topics Using Three-Dimensional Printers** (A Thesis in the Field of Mathematics for Teaching for the Degree of Master of Liberal Arts in Extension Studies). Cambridge: Harvard University, 2012.

WEIGEL, Mauro. **Bonaventura Cavalieri**. Portal da matemática, 2010. Disponível em: <http://mauroweigel.blogspot.com.br/2010/08/bonaventura-cavalieri.html>Acesso em: 20/04/2016.