



O cálculo de volume de sólidos usando o princípio de Cavalieri mediado por materiais confeccionados em impressão 3d

Solid volume calculation using the Cavalieri's principle mediated by 3d printing materials

Luiz Gustavo Cunha¹
Rogério de Aguiar²

Resumo: Sabe-se que os alunos possuem uma certa dificuldade com questões que envolvem o cálculo de volumes dentro da geometria espacial. Esse artigo visa abordar a dificuldade de percepção dos alunos na visualização dos sólidos geométricos para calcular volumes. Com a intenção de reduzir essa deficiência, foi elaborada uma sequência didática que aborda o cálculo de volumes utilizando o Princípio de Cavalieri, auxiliada pela manipulação de materiais concretos confeccionados com a tecnologia da impressão 3D e pelo software GeoGebra. A sequência didática elaborada possui um total de sete atividades e foi aplicada à alunos do Ensino Médio de uma escola pública de Joinville.

Palavras-chave: Volume de sólidos, Princípio de Cavalieri, Impressão 3D.

Abstract: Students are known to have some difficulty with issues involving the calculation of volumes within spatial geometry. This article aims to address the students' perception difficulty in visualizing geometric solids to calculate volumes. With the intention of reducing this deficiency, a didactic sequence was elaborated that deals with the volume calculation using the Cavalieri's Principle, aided by the manipulation of manipulatives made in 3D printing and the GeoGebra software. The elaborate didactic sequence has a total of seven activities and was applied to high school students from a public school in Joinville.

Keywords: Volume calculation, Cavalieri's principle, 3D printing.

1. Introdução

É fato que a geometria está presente ao nosso redor. Ela é a parte mais visível da matemática, representada através de formas e figuras. Porém, mesmo com essa exposição, muitos alunos possuem dificuldade em percebê-la, por diversos motivos, e isso leva a dificuldades de aprendizagem em sala de aula. Para

¹ Mestre em Matemática, EEB Prof^a Antônia A. C. dos Santos, Joinville - SC, luizlgcunha@gmail.com.

² Doutor em Matemática, UDESC, Joinville - SC, rogerio.aguiar@udesc.br.



Gutiérrez (1996), os professores dão mais importância ao lado algébrico da geometria, através da utilização direta de fórmulas de áreas e volumes, por exemplo, do que ao seu aspecto visual, que é o entendimento do sólido em si e de seus elementos. Este também é o posicionamento da nova BNCC (Base Nacional Comum Curricular), que está entrando em vigor no Brasil.

“...a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras”. (BRASIL, 2018, p. 272)

O excesso de pensamento algébrico na Geometria acaba criando dificuldades para os alunos, pois devem antes entender os princípios algébricos para só então “aplicar” tais ideias, o que vem a ser equivocado, pois esses raciocínios podem ser desconexos. Desse modo, para que os alunos possuam um melhor entendimento geométrico

é fundamental que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano. (BECKER, 2009, p. 20)

De fato, o entendimento de visualização vai além do simples olhar ou tocar o objeto. Segundo Gutiérrez (1996), “visualização na matemática é um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico, realizado para resolver problemas ou provar propriedades.”

Segundo Flores; Wagner; Buratto (2012, p.35)

Adicionar visualização no contexto da educação matemática, além de promover a intuição e o entendimento, possibilita uma maior abrangência da cobertura em assuntos matemáticos, permitindo que os estudantes não somente aprendam matemática, mas também se tornem capazes de construir sua própria matemática.

Pensando nesses aspectos, optou-se por desenvolver uma sequência didática que ampliasse o pensamento geométrico dos alunos de maneira mais



atrativa, utilizando a interação estática de objetos produzidos em impressão 3D associada a manipulação dinâmica propiciada pelo software GeoGebra. Esses elementos foram aplicados às ideias de cálculo de volumes através do Princípio de Cavalieri, uma das principais ferramentas para esse fim nos livros didáticos que, porém, é pouco explorado.

Morais (2013) realizou um estudo sobre sete coleções de livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD no ano de 2012 e constatou que, apesar de todas as sete coleções analisadas abordarem o Princípio de Cavalieri para o desenvolvimento das fórmulas encontradas, afirma que “[...] ainda há avanços necessários quanto à abordagem desse princípio, uma vez que algumas coleções não justificam, por exemplo, a igualdade entre as áreas das seções [...].”(MORAIS, 2013, p. 116)

Afirma Lima et. al. (2010, p. 86)

Nos livros didáticos brasileiros, este assunto é apresentado, em geral, de forma bastante insatisfatória. Muitos sequer dizem o que significa calcular um volume e vários outros chutam, sem dó nem piedade, todas as fórmulas. Alguns citam o Princípio de Cavalieri, mas não o utilizam corretamente, e outros nem isso fazem.

O Princípio de Cavalieri poderia ser melhor explorado como ferramenta de investigação pelos alunos do Ensino Médio, pois segundo Eves (2011, p. 426), apesar de não ficar bem claro alguns conceitos que Cavalieri queria expressar, é certo que “Com a aceitação desses princípios como evidentes, intuitivamente, podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de cálculo”.

2. Cavalieri e seu princípio

Segundo Eves (2011), Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão em 1598 e, aos 15 anos de idade tornou-se Jesuado (ordem religiosa de Milão). Foi aluno de Galileu e, provavelmente por intermédio deste, atuou como professor de matemática



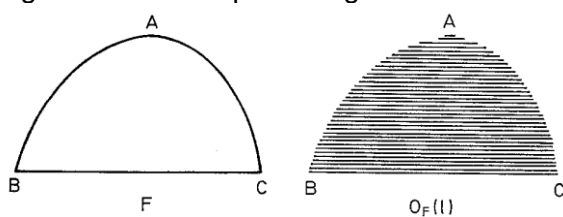
da Universidade de Bolonha de 1629 até 1647. Deixou uma obra vasta abrangendo matemática, óptica e astronomia. Foi um dos responsáveis pela introdução dos logaritmos de Napier na Europa, tornando-se com isso um matemático muito influente. A obra que se tornou seu legado foi o tratado *Geometria indivisibilibus*, publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Nesse trabalho ele apresenta seu *método dos indivisíveis*, cujas raízes remontam a Demócrito (c. 410 a.C.) e Arquimedes (c. 287-212 a.C.), mas cuja motivação direta talvez se encontre nas tentativas de Kepler (1571 – 1630) de calcular áreas e volumes, como o volume de barris de vinho.

Seu método, segundo Howard Eves, se baseia na ideia de que

um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas. (EVES, 2011, p. 425)

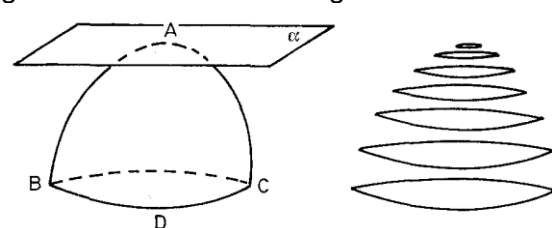
Assim, um plano poderia ser pensado como uma infinidade de cordas de diâmetro desprezível colocadas lado a lado, como apresentado na Figura 1. De modo semelhante, um sólido poderia ser representado como uma infinidade de placas de espessura desprezível paralelas entre si, como representado na Figura 2.

Figura 1: Ideia de plano segundo Cavalieri



Fonte: ANDERSEN, 1984, p. 301.

Figura 2: Ideia de sólido segundo Cavalieri



Fonte: ANDERSEN, 1984, p. 311.

Afirma Eves (2011, p. 426), que essas ideias deram origem aos chamados Princípios de Cavalieri:

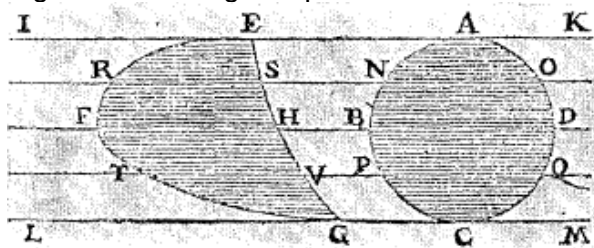
- “Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é



constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante”. (Figura 3)

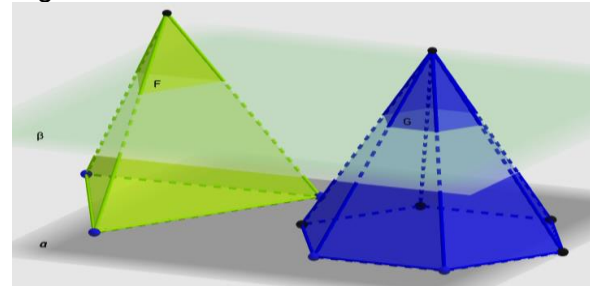
- “Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante”. (Figura 4)

Figura 3: Duas figuras planas de mesma área



Fonte: ANDERSEN, 1984, p. 349.

Figura 4: Dois sólidos de mesmo volume



Fonte: Produção do autor, 2019.

3. Ferramentas utilizadas

Optou-se pelo software GeoGebra para a aplicação por ser de fácil acesso e manipulação. Podendo ser baixado livremente na internet, possui uma comunidade de milhões de usuários ao redor de todo o mundo, que vem compartilhando ideias e aplicações diversas em seu site (<http://www.geogebra.org>), tornando-se uma opção entre as ferramentas de apoio para o ensino e aprendizagem de ciência, tecnologia, engenharia e matemática.

Apesar de ser um programa para a simulação geométrica e algébrica de diversas situações diferentes que abrangem a matemática, é um recurso pouco utilizado nas escolas, seja pelas dificuldades encontradas devido à falta de estrutura das escolas, que possuem laboratórios de informática mas não dispõem de professores preparados para operá-los, ou pela falta de incentivo aos professores para que estes saibam manipulá-los.

Nos últimos anos, graças a evolução da tecnologia, as impressoras 3D estão muito mais acessíveis, com equipamentos e material de custo mais baixo, o que vêm ao encontro da realidade de pequenas empresas, universidades e até mesmo



escolas, que enxergam cada vez mais esses equipamentos com bons olhos. Ela pode elaborar protótipos e ferramentas em diversas áreas, como ciências, na construção de modelos de células, de órgãos e tecidos, na história, na construção de aparatos e utensílios antigos, na química, na construção de estruturas moleculares, e na matemática, na construção de materiais concretos.

O aproveitamento da tecnologia de impressão 3D no aprendizado da matemática também é reportado por Knill e Slavkovsky (2013). Segundo os autores, a visualização de provas e conceitos é importante para a comunicação da matemática, não sendo somente ilustrativa, educacional ou heurística, pois também tem um valor prático. Além da visualização de objetos confeccionados, eles ainda citam a construção de modelos em softwares que utilizam expressões algébricas. Nesse caso, os gráficos gerados pelas expressões poderiam ser transformados em modelos, de modo a facilitar a sua visualização, e melhor, podem manipular as expressões para entender suas variações e analisar a influência dos parâmetros no comportamento do gráfico.

A fim de explorar essas possibilidades, o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino (PEMSA), composto por professores do departamento de matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) – Joinville, adquiriu duas impressoras 3D com recursos da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC), que se encontram no laboratório Fábrica Matemática (Fab3D). Com esses e outros equipamentos, foram produzidos vários materiais manipuláveis que auxiliam os professores em formação em seus estudos e pesquisas.

Materiais concretos ou manipuláveis vem sendo utilizados a muito tempo por professores de matemática para auxiliar o ensino e a aprendizagem de matemática de maneira mais lúdica, mais visual e, conseqüentemente, menos abstrata. Segundo Lorenzato (2006), o material didático manipulável é um instrumento importante, pois proporciona um maior envolvimento dos alunos na sala de aula, desenvolvendo assim várias competências no que se refere a capacidade de abstrair, generalizar,



projetar e transcender, sendo que o professor torna-se o orientador dos processos de ensino e aprendizagem e passa a direcionar a formalização do conhecimento e a realização de tarefas.

Para essa aplicação foram impressos quatro kits que se diferenciavam entre si pelas suas medidas de raio e altura. Cada kit possuía seis sólidos impressos, conforme Figura 5:

- Um cilindro de raio R e altura H ;
- Um paralelepípedo de bases medindo R e πR e altura H ;
- Um cone de raio R e altura H , seccionado paralelamente à base em uma altura h e;
- Uma pirâmide de base quadrada com arestas da base medindo $R\sqrt{\pi}$ e de altura H , seccionada paralelamente à base na mesma altura h que o cone.
- Uma esfera de raio R com duas seções, sendo uma na altura R , formando duas semiesferas, e outra seção em uma altura h .
- Uma anticlépsidra também com duas seções, nas mesmas alturas R e h da esfera. Anticlépsidra é um sólido geométrico formado a partir de um cilindro equilátero (altura = diâmetro da base = $2 \times$ (raio da base)), do qual subtraímos dois cones opostos pelos vértices (como uma ampulheta) cujas bases coincidam com as bases do cilindro e cuja altura seja igual ao raio da base. Desse modo, a anticlépsidra é limitada exteriormente pela superfície lateral do cilindro e, interiormente, pelos dois cones, conforme Figura 6.

Figura 5: Sólidos confeccionados em impressão 3D



Fonte: Acervo do autor, 2019.

Figuras 6: Anticlépsidra



Fonte: Acervo do autor, 2019.



Com a visualização dinâmica propiciada pelo GeoGebra e manipulação dos sólidos manipuláveis produzidos pela impressão 3D, tornou-se possível produzir uma sequência didática que veio em auxílio aos alunos para que esses explorassem o Princípio de Cavalieri de forma mais atrativa do que a costumeira resolução de exercícios estruturados.

5. Metodologia

A sequência didática foi aplicada à alunos da terceira série do Ensino Médio da Escola de Educação Básica Professora Antônia Alpaídes Cardoso dos Santos, localizada no bairro Nova Brasília, em Joinville, Santa Catarina, no mês de novembro de 2018, no período noturno. A turma possuía um total de 24 alunos, dos quais 22 participaram efetivamente das atividades. A opção dessa turma se deu pelo fato de que o autor lecionava nela e, em virtude do conteúdo proposto, o cálculo de volumes, estar sendo trabalhado na época da realização da pesquisa.

Essa sequência didática possui um total de sete atividades, que foram aplicadas durante seis aulas. É bom salientar que a aplicação da sequência didática se deu logo após a aplicação dos conteúdos “áreas de figuras planas” e “volumes de pirâmides, prismas, cilindros e cones”, prevista na ementa da instituição. Já o conteúdo “volume da esfera” não foi trabalhado, justamente para que fosse uma surpresa a maneira de se determinar o volume desse sólido. Dessa forma, foi aplicada uma revisão dos conteúdos, momento em que foram avaliados os conhecimentos prévios dos alunos participantes.

A primeira atividade consistiu em realizar um levantamento histórico sobre Cavalieri por meio de pesquisa individual, em que deveriam ser citados o momento histórico, as descobertas e contribuições desse matemático na história e se as suas descobertas obtiveram aceitação naquela época. Essa pesquisa serviu para que os alunos tivessem o primeiro contato com Cavalieri e, se houvesse interesse individual, o modo proposto por ele para o cálculo do volume de sólidos geométricos.



Essa atividade foi entregue uma semana antes das aulas citadas, para que houvesse tempo de analisar o material pesquisado e completar possíveis lacunas de conhecimentos não pesquisados.

A segunda atividade começa com uma discussão sobre os fatos históricos relatados na pesquisa, bem como um debate sobre as ideias adquiridas. Foi apurado que a maioria dos alunos trouxeram fatos históricos apenas, sem perceber como essas ideias influenciaram a matemática na época. Poucos alunos questionaram sobre o Princípio, mas citando não o ter entendido, momento em que foram explicadas algumas situações.

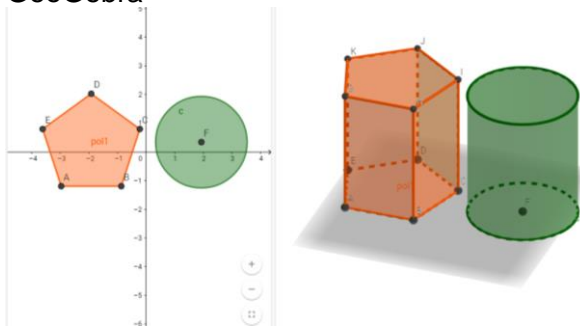
Durante a terceira atividade os alunos tiveram o primeiro contato com os kits de materiais manipuláveis, mas estes não estavam completos. Os kits possuíam um prisma, um cilindro, uma pirâmide e um cone. Em um primeiro momento, os alunos foram instigados a medir e comparar as medidas encontradas no prisma e no cilindro, bem como os seus volumes. Depois de registrar suas conclusões, foi a vez de comparar as medidas da pirâmide com as medidas do cone, também comparando seus volumes e o volume de seus troncos, uma vez que ambos estavam seccionados na mesma altura h . Através da comparação entre essas medidas, começaram a surgir ideias de que os volumes eram “semelhantes”, mas não iguais. Ao serem questionados sobre isso, os alunos começaram a medir com mais precisão, momento em que a diferença entre as medidas de volume da pirâmide e do cone diminuiu, levando-os a perceber que as medidas de volume desses sólidos eram realmente iguais.

A quarta atividade consistiu em apresentar a comparação entre alguns sólidos no GeoGebra, para que os alunos pudessem observar as medidas de área da base e de várias seções paralelas a ela, de modo a se convencerem e se assegurarem de que essas igualdades são reais, o que consolida o Princípio de Cavalieri. As quatro comparações apresentadas foram entre prismas, prisma e cilindro, entre pirâmides e pirâmide e cone, todos com manipulação livre nas alturas e no raio, como apresentado na Figura 7.



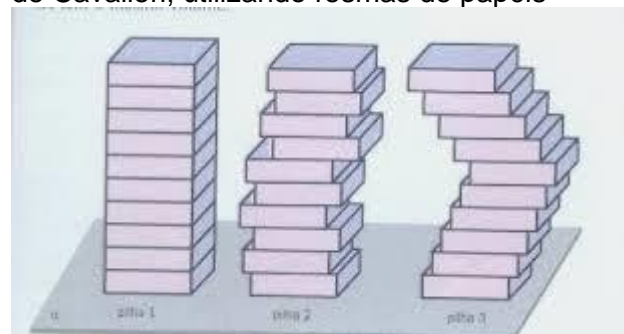
A quinta atividade foi a apresentação formal do Princípio de Cavalieri. Inicialmente foi apresentado o vídeo “3, 2, 1 Mistério” (YAKHNI, 2010), no qual os atores apresentam de forma lúdica o Princípio de Cavalieri. Após o vídeo, foram realizados alguns questionamentos sobre as atividades anteriores desenvolvidas e a apresentação clássica com uma resma de papéis, como apresenta na Figura 8. Com ela é possível perceber que a área de cada seção é representada por uma página que, indiferente da situação, possui a mesma medida de área. Essa ideia esclareceu definitivamente o Princípio de Cavalieri aos alunos, que ficaram motivados a aplicar esse conhecimento, o que foi posto à prova na sexta atividade.

Figura 7: Prisma pentagonal e cilindro no GeoGebra



Fonte: Produção do autor, 2019.

Figura 8: Apresentação clássica do Princípio de Cavalieri, utilizando resmas de papéis



Fonte: Benedeti et. al. (2004, p. 16).

Para verificar o bom entendimento do princípio, os alunos foram desafiados a calcular o volume de uma esfera, conhecimento não fornecido até então. Para tal, foi entregue a eles dois sólidos restantes: a esfera e a anticlépsidra. A ideia era comparar as áreas das seções da esfera com as áreas das coroas circulares encontradas na anticlépsidra, de modo a encontrar áreas de mesma medida e, através do Princípio de Cavalieri, determinar o volume da esfera. Lembrando que o volume da anticlépsidra já poderia ser calculado, pois eles já haviam aprendido a maneira de se calcular o volume de cilindros e cones, sólidos que compõem a anticlépsidra. Essa atividade é, em geral, apresentada nos livros didáticos, mas de forma superficial, sem explorar as ideias que o aluno adquiriu, levando-os a não perceber a importância desse princípio, que é muito mais explorado nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.



Durante essa atividade, os alunos começaram a apresentar dificuldades na comparação das seções, pois não conseguiam medir a área da coroa circular na anticlépsidra. Foi realizada uma intervenção nesse ponto, lembrando-os que era a diferença entre as áreas de dois círculos, um externo e outro interno. Assim eles conseguiram calcular a área sem mais dificuldades, como expressado na Figura 9. É interessante mencionar que, com o material concreto fornecido, os alunos puderam medir a área de apenas uma seção horizontal de cada sólido, sendo o suficiente “para eles” a prova de que o Princípio de Cavalieri funcionou. Porém, o Princípio de Cavalieri exige que qualquer seção de ambos os sólidos que foram seccionados na mesma altura tenha áreas iguais.

Figura 9: Aluno realizando a atividade seis



Fonte: Acervo do autor, 2018.

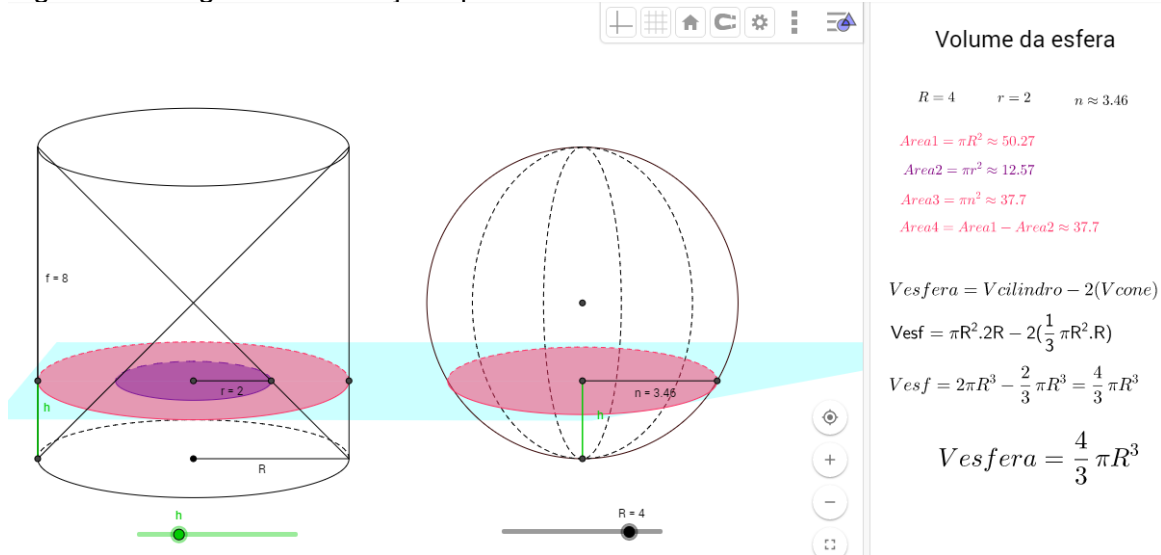
Os alunos foram questionados quanto a generalização dessa comparação, ou seja, induzidos a concluir a fórmula para o cálculo do volume da esfera. Das quatro equipes, duas delas intuíram tal fórmula, com algumas intervenções. As outras duas tiveram algumas dificuldades durante a execução da atividade e não conseguiram concluir corretamente suas ideias.

A sétima atividade dessa sequência foi a apresentação dessa comparação entre a esfera e a anticlépsidra no GeoGebra, através de um arquivo desenvolvido por Benk et. al. (2016), apresentado na Figura 10. Aqui há a possibilidade de manipular as medidas de raio e altura das seções paralelas à base, apresentando as medidas das áreas encontradas. Nesse momento os alunos que concluíram a



atividade anterior puderam corroborar suas hipóteses da maneira de como calcular o volume da esfera.

Figura 10: Imagem da simulação apresentada no GeoGebra



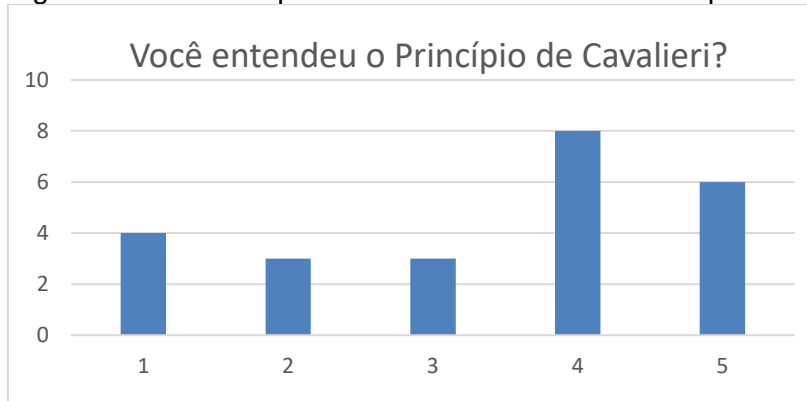
Fonte: BENK ET. AL., 2016, p 10.

Após a aplicação da sequência didática, os alunos foram convidados a responder a um questionário, que tinha por intuito de verificar a satisfação deles em relação ao projeto desenvolvido e aos materiais utilizados. Esse questionário possuía questões referentes a idade, tempo de estudo, sobre o quanto conheciam do software GeoGebra e da impressão 3D e o que eles alegam ter aprendido com o desenvolvimento desse projeto.

Segundo esses registros, os alunos perceberam a importância do Princípio de Cavalieri, que pode facilitar o trabalho em situações diversas, desde que sejam respeitadas às exigências de os sólidos possuírem mesma área em todas as seções paralelas à base e mesma altura. Além disso, a maioria dos alunos afirmou compreender o funcionamento do princípio e entender melhor o próprio cálculo de volumes, e gostaram da sequência didática apresentada, por trabalharem com situações novas e motivadoras, além de utilizar recursos pouco explorados por eles em sala de aula, como o GeoGebra e os materiais manipuláveis, conforme apresentado nas Figuras 11 e 12.

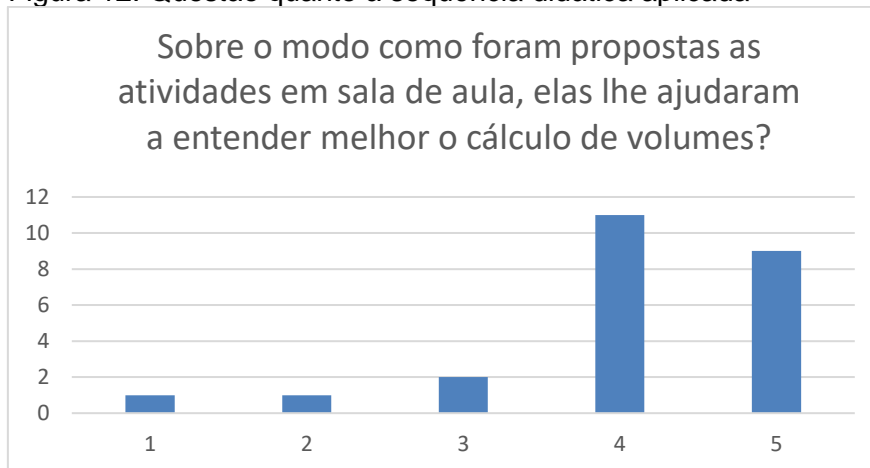


Figura 11: Questão quanto ao entendimento do Princípio de Cavalieri



Fonte: Produção do autor, 2019.

Figura 12: Questão quanto à sequência didática aplicada



Fonte: Produção do autor, 2019.

6. Considerações

O Princípio de Cavalieri é uma ferramenta muito útil, pois permite a determinação do volume de figuras que podem ser complexas, desde que haja um outro sólido para comparação. Os materiais manipuláveis e o GeoGebra se mostram como grandes aliados dos professores para o ensino de geometria, pois além de serem mais atrativo que exercícios elaborados, permitem a manipulação dos seus elementos, o que contribui para um entendimento mais amplo da natureza dos sólidos. Desse modo, a sequência didática proposta serviu ao seu propósito, tornando-se uma opção para o ensino do cálculo de volumes no Ensino Médio.



Referências

BECKER, Marcelo. **Uma alternativa para o ensino da geometria**: visualização geométrica e representações de sólidos no plano. 2009. 111 páginas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2009.

BENEDETI, V. J. et. al. **Projeto Teia do saber**. Ilha Solteira [?], UNESP, 2004. Disponível em:
<https://www.feis.unesp.br/Home/Extensao/teia_saber/teia2004/matematica/Apresentacoes/grupo_d.pdf>. Acesso em: 18 nov 2019.

BENK, Polyana; SILVA, Sérgio Marconi da; FIGUEIREDO, Elisandra Bär de; SIPLE, Ivanete Zuchi. O Princípio de Cavalieri: numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais. **II Colóquio Luso-Brasileiro de Educação**, v. 1, p. 685-696, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <
http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 19 nov 2019.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, tradução Higyno H. Domingues, Campinas: UNICAMP, 2011.

FLORES, Cláudia R.; WAGNER, Débora R.; BURATTO, Ivone C.F. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**. v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012.

KALEFF, Ana M.M.R. **Vendo e entendendo poliedros**: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 2003.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LORENZATO, Sérgio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associadas, 2006. (Coleção formação de professores).

MORAIS, Leonardo B. **O que se espera que os alunos saibam sobre a grandeza volume ao concluírem a Educação Básica**: uma análise em exames de avaliação. 2013. 134 páginas. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.