Quando uma equação diofantina tem solução? Estabelecendo conjecturas no contexto do ensino superior

When does a diophantine equation have a solution? Making conjectures in the context of higher education

Débora Eloísa Nass Kieckhoefel[1]
Elisandra Bar de Figueiredo[2]
Ivanete Zuchi Siple[3]

Resumo: O presente artigo aborda o desenvolvimento de uma atividade sobre equação diofantina que visou relacionar esse conteúdo, visto na disciplina de Introdução à Teoria de Números, com o contexto da Educação Básica. A pesquisa foi desenvolvida em nível de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional e aplicada aos alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina. A atividade apresentada, aqui, consistiu na proposição de uma sequência didática que objetivava que os alunos criassem conjecturas que os possibilitassem validar ou refutar "quando uma equação diofantina tem solução?" e "como determinar esse conjunto solução?". Entre os resultados, chama a atenção que as conjecturas elaboradas pelos alunos eram válidas apenas para casos particulares e não podiam ser generalizadas para qualquer equação diofantina. Ainda, os alunos perceberam a existência de infinitas soluções, mas não conseguiam expressar matematicamente o conjunto solução. Destacamos a riqueza das discussões realizadas pelas equipes, o envolvimento, a criatividade e a vontade de descobrir as respostas, bem como o diálogo entusiasmado (ou decepcionado) quando alguma conjectura criada funcionava (ou não).

Palavras-chave: Sequência didática. Conjecturas. Equação Diofantina. Educação Básica.

Abstract: This paper approaches the development of an activity about diophantine equations that related this content, which is seen in the Introduction to Number Theory class, to the context of basic education. The research was developed in a Professional Master's Degree in Mathematics and applied to freshmen students of the Mathematics degree program at Santa Catarina State University. The activity presented here consisted of proposing a didactic sequence that asked the students to create conjectures that would enable them to validate or refute "when does a diophantine equation have a solution?" and "how to determine this solution

[1] Mestre, Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Joinville, debora.kieckhoefel@udesc.br.

[2] Doutora, Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Joinville, elisandra.figueiredo@udesc.br.

[3] Doutora, Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), Joinville, ivanetesiple@udesc.br.

set?". Among the results, it is noteworthy that the students' conjectures were valid only for particular cases and could not be generalized to any diophantine equation. Still, the students realized the existence of infinite solutions, but could not mathematically express the solution set. We highlight the depth of team discussions, involvement, creativity and willingness to find answers, as well as enthusiastic (or disappointed) dialogue when a conjecture worked (or not).

Keywords: Didactic Sequence. Conjectures. Diophantine equation. Basic Education.

1. PARA COMEÇO DE CONVERSA

Como docente, a primeira autora desse artigo, do curso de Licenciatura em Matemática percebia duas queixas recorrentes dos alunos: uma delas se referia ao fato de estarem cursando licenciatura e precisarem estudar uma matemática, que, na visão deles, não era aquela que precisariam ensinar na escola; a outra dizia respeito ao fato de terem escolhido cursar matemática por gostarem da matemática da escola, mas essa não era a mesma que encontravam no Ensino Superior.

Tais questões inspiraram a docente, como aluna do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), a desenvolver e aplicar sua pesquisa com alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), na disciplina de Introdução à Teoria de Números (ITN). O objetivo geral da pesquisa foi de apresentar uma possiblidade de relacionar o conteúdo de equações diofantinas, visto na disciplina de ITN com o contexto da Escola Básica. Assim, foram desenvolvidas e aplicadas 4 atividades: a primeira envolvia história da matemática; a segunda, a formalização do conteúdo; a terceira, resolução de exercícios; e a quarta, uma discussão sobre as equações diofantinas e a Educação Básica (Kieckhoefel, 2019). Neste artigo, abordaremos a segunda atividade[4], evidenciando alguns pontos que julgamos relevantes ao analisar o material entregue pelos alunos.

2. ANALISANDO E RESOLVENDO EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Devido à obra *Arithmetica de Diofanto*, "hoje recebem o nome de equações diofantinas todas as equações polinomiais (com qualquer número de incógnitas), com

[4] A análise completa da sequência didática, além das demais atividades propostas, encontra-se em KIECKHOEFEL (2019).

coeficientes inteiros, sempre que se trata de procurar suas possíveis soluções também entre inteiros” (DOMINGUES, 2009, p.147). Neste trabalho, bem como na disciplina de ITN, tratamos apenas das equações diofantinas lineares com duas incógnitas, ou seja, consideramos equações do tipo $ax + by = c$, em que a e b são números inteiros e não simultaneamente nulos.

Uma vez que os alunos haviam construído uma base histórica sobre Diofanto de Alexandria, por meio da primeira atividade que havia sido proposta a eles, na segunda atividade partimos para a teoria matemática acerca do conteúdo de equações diofantinas. Assim, os alunos reuniram-se em equipes de 2 a 6 pessoas (conforme escolha deles), e, para manter o sigilo, vamos nos referir às equipes utilizando números de 1 a 8.

A atividade 2 foi dividida em 4 partes, conforme apresentamos no Quadro 1, entregues uma por vez para as equipes. Assim, os alunos realizaram a “Parte 1” e, após a sua entrega, tinham acesso à “Parte 2”. Da mesma forma, recebiam apenas a “Parte 3” e a “Parte 4” após terem entregue a parte imediatamente anterior.

Atividade 2: Analisando equações diofantinas

PARTE 1

1 – Observe a equação $3x + 7y = 20$. Você consegue encontrar uma solução? Justifique! Existe alguma relação entre os coeficientes 3, 7 e 20?

2 – Nas equações abaixo, discutam se é possível obter uma solução no conjunto dos inteiros. Se existir, explicite-a. Você percebe alguma relação entre os coeficientes?

a) $13x + 4y = 1$ c) $10x - 16y = -8$

b) $4x + 2y = 7$ d) $3x - 2y = 2$

3 – Agora, queremos saber: quando uma equação diofantina tem solução no conjunto dos inteiros? Usando os exemplos acima queremos encontrar alguma “regra” que nos permita analisar qualquer equação diofantina e dizer se ela tem solução ou não. Observe os exemplos já discutidos e junto com sua equipe crie conjecturas.

PARTE 2

4 – Compare a solução encontrada na questão 2 com pelos menos outras duas equipes. As soluções foram as mesmas? Se não, anote outras soluções válidas.

5 – Discutam com alguma outra equipe sobre as conjecturas que eles criaram na questão 3. Vocês chegaram à mesma conclusão? Se não, qual das conjecturas está correta? Após discutir com a outra equipe, complete a frase:

"Uma equação diofantina $ax + by = c$, em que $\mathrm{a} \neq 0$ ou $\mathrm{b} \neq 0$, admite solução no conjunto dos inteiros se ____."

PARTE 3

6 – Nas equações do exercício 2 você já deve ter percebido que, quando uma equação diofantina tem solução, existe mais de um par ordenado (x_0, y_0) que é solução dessa equação. Na verdade, elas admitem infinitas soluções. No item a), por exemplo, algumas das soluções da equação $13x + 4y = 1$ são:

$$x = 1\ e\ y = -3;\ x = 5\ e\ y = -16;\ x = 9\ e\ y = -29;\ x = 13\ e\ y = -42$$

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

7 – Apresente pelo menos três soluções das equações dos itens c) e d).

c) $10x - 16y = -8$ d) $3x - 2y = 2$

7.1 – Expresse a regra geral para todas as soluções dos itens acima.

PARTE 4

8 – Discuta com outra equipe os resultados encontrados na PARTE 3 da atividade e complete a frase:

"Seja (x_0, y_0) uma solução da equação diofantina $ax + by = c$, onde $\mathrm{a} \neq 0$ e $\mathrm{b} \neq 0$. Então, essa equação admite infinitas soluções e o conjunto dessas soluções é dado por:____."

Quadro 1 – Atividade 2. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A "Parte 1", apresentada no Quadro 1, tinha como objetivo que os alunos, a partir das discussões de exemplos particulares realizadas com os colegas, criassem hipóteses para a seguinte situação-problema: "quando uma equação diofantina tem solução?". Na "Parte 2", objetivávamos que os alunos conjecturassem que uma equação diofantina, quando tem solução, possui infinitas soluções. E, comparando as suas hipóteses com as das outras equipes, validassem (ou não) a hipótese criada na etapa anterior. Com isso esperávamos que os alunos chegassem à conclusão que uma equação diofantina $ax + by = c$, admite solução se, e somente se, $mdc(a, b)$

divide c. Em seguida, na “Parte 3” esperávamos que os alunos, já tendo concluído da “Parte 2” que uma equação diofantina, quando tem solução, tem na verdade infinitas soluções, deduzissem a forma geral do conjunto solução de uma equação diofantina.

Faremos a a análise do material entregue pelos alunos na mesma dinâmica em que a atividade foi realizada por eles, apresentando cada uma das partes separadamente.

2.1 ATIVIDADE 2

As respostas para as perguntas feitas na sequência didática já são conhecidas e formalizadas. Nos embasamos em duas proposições enunciadas e demonstradas em Domingues (2009) e a ideia era que os alunos realizassem as atividades orientadas de modo a elaborar conjecturas que se aproximassem desssas proposições. Assim, a partir de agora, apresentamos as análises das atividades propostas, que foram divididas em três seções – uma para cada parte da atividade realizada[5]. As referidas proposições serão apresentadas ao longo da análise.

2.1.1 Atividade 2 – Analisando Equações Diofantinas (Parte 1)

Trataremos agora da análise da primeira parte da atividade 2, que, como já exposto anteriormente, tinha como objetivo que os alunos criassem hipóteses para a situação-problema: “quando uma equação diofantina tem solução?”. A **Proposição 1:** “Uma equação diofantina $ax + by = c$, em que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, admite solução se, e somente se, $d = mdc(a, b)$ divide c.” (DOMINGUES, 2009, p. 148-149), responde essa questão.

Por tentativa e erro, todas as equipes conseguiram encontrar pelo menos uma solução para a equação diofantina da questão 1. Em especial, destacamos que todas as 8 equipes apresentaram como solução $x = y = 2$. Entre as equipes, 3 apresentaram um raciocínio semelhante ao apresentado no Quadro 2.

---

[5] Em função da falta de tempo durante a aula, nenhuma das equipes realizou a Parte 4 da atividade.

Encontramos $x = y = 2$, pois $3+7=10$, que é a metade de 20, logo $2(3+7) = 6+14 = 20$. A relação é que a soma de 3+7 é a metade de 20.

Quadro 2 - Equipe 3: questão 1. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Destacamos outros pontos de vista apresentados pelos alunos. A equipe 4, por exemplo, realizou várias tentativas, como podemos ver no Quadro 3.

Vamos, contudo, tentar construir uma teoria para resolver essas equações, assim como Diofanto teve que fazer, em sua época. → N → $\boxed{an + bn = cn}$

→ Quando você multiplica um lado por um nº n, o outro lado também será multiplicado por n.

1 – Observe a equação $3x + 7y = 20$. Você consegue encontrar uma solução? Justifique!
Existe alguma relação entre os coeficientes 3, 7 e 20?

$\boxed{\to x=2;\ y=2}$; $\boxed{\to x=-5;\ y=5}$

→ $y=1$; Falta 13 e $3 \nmid 13$

→ x ou $y=0 \Rightarrow 3 \nmid 20$ e $7 \nmid 20$

→ $x=1$; $7 \nmid 17$
→ $x=3$; $7 \nmid 11$
→ $x=4$; $7 \nmid 8$
→ $x=5$; $7 \nmid 5$

→ $x=6$; $7 \nmid 2$

→ $x>7$ ou $y>2 \Rightarrow$ resultado > 20

→ Dobro de 3 + Dobro de 7 = 20 ? Dobro de 10

2 – Nas equações abaixo, discutam se é possível obter uma solução no conjunto dos → Relação

Quadro 3 - Equipe 4: questão 1. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Em cada tentativa os alunos atribuíam o valor de uma das variáveis (na maior parte das vezes o “x”, como vemos na coluna central) e verificavam se o resto era divisível pelo outro coeficiente. É interessante observar que os alunos não consideraram soluções negativas para a equação, e até chegaram à conclusão que x não poderia ser maior do que 7 e y não poderia assumir valores maiores do que 2, pois ultrapassaria 20.

A equipe 7 seguiu em outra direção, relacionando os coeficientes (3, 7 e 20) e identificando que eles são primos entre si. Além disso, conseguiram apresentar mais de uma solução para a equação (Quadro 4).

Os coeficientes são primos entre si logo o mdc = 1

ex 1) $3.9 + 7.(-1) = 20$ — $27 - 7 = 20$ — $20 = 20$ — Solução

ex 2) $3.2 + 7.2 = 20$ — $6 + 14 = 20$ — $20 = 20$

Quadro 4 - Equipe 7: questão 1. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Na questão 2 os alunos deveriam apresentar soluções para cada uma das quatro equações propostas, buscando encontrar uma relação entre os coeficientes. Das equações apresentadas, apenas a letra b) não possuía solução. Todas as equipes concluíram que não era possível apresentar uma solução no conjunto dos números inteiros e, com exceção de uma equipe, todas as demais dissertaram sobre a impossibilidade de somar dois números pares e obter um resultado ímpar. Trazemos uma dessas falas no Quadro 5.

b) $4x + 2y = 7$ → não tem solução no conjunto dos inteiros. mdc(4,2)=2 e 2∤7. Também percebemos que 4x é par e 2y também é par, pois um número par que multiplica qualquer outro número tem resultado par. E por propriedade, a soma de números pares é sempre par, e na equação temos resultado ímpar.
c) $10x - 16y = -8$

Quadro 5 - Equipe 1: questão 2b. *Fonte: Dados da pesquisa, 2018.*

Entre as 8 equipes, a 1, a 2 e a 6 apresentaram apenas uma solução, encontrada por tentativa e erro, sem discursar muito sobre o raciocínio utilizado ou sobre a relação entre os coeficientes. A equipe 7, apresentou 2 soluções para cada equação e, além disso, destacou o mdc entre os coeficientes.

a) $13x + 4y = 1$ mdc = 1 Ex 1) $13.1 + 4.(-3) = 1$ | $13 - 12 = 1$ | $1 = 1$ Ex 2) $13 \cdot 5 + 4 \cdot (-16) = 1$ | $65 - 64 = 1$ | $1 = 1$
* mais de uma solução

Quadro 6 - Equipe 7: questão 2ª. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A equipe 8 expôs em todos os exemplos uma relação entre os coeficientes, mas não se preocupou em encontrar uma relação que fosse válida para qualquer equação diofantina (Quadro 7). Todas as relações descritas por eles são verdadeiras, mas válidas apenas para casos particulares. É interessante, contudo, que em cada uma das relações eles explicitam conceitos vistos na disciplina de ITN como divisibilidade, resto, paridade e números primos.

a) $13x + 4y = 1$ $x = 1$ $y = -3$
a relação entre os coeficientes é que o coeficiente $a = 13$ dividido pelo coeficiente $b = 4$, da resto do coeficiente $c = 1$.

b) $4x + 2y = 7$
Não tem solução para x e y porque qualquer número multiplicado por 2 e 4 é par e a soma de dois pares é um número par e a diferença de dois números pares é par também logo, o resultado não pode ser ímpar.

c) $10x - 16y = -8$ $x = 4$ $y = 3$
a relação dos coeficientes é que todos são números pares.

d) $3x - 2y = 2$ $x = -2$ $y = -4$
a relação entre os coeficientes é que toda vez que eles forem primos e o resultado par, a equação é válida.

Quadro 7 - Equipe 8: questão 2. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Ainda sobre a questão 2, vamos abordar com mais detalhes as soluções das equipes 3, 4 e 5 que apresentaram um raciocínio um pouco distinto das demais, ainda que as equipes 3 e 5 apresentem raciocínios semelhantes.

Vemos no Quadro 8**Erro! Fonte de referência não encontrada.** que os alunos da equipe 3, observaram várias relações. Trabalharam com a noção de algoritmo da divisão, assim como já destacado pela equipe 8 no Quadro 7. Chegaram, erroneamente, à conclusão que $4y < 13x$, talvez por não terem considerado os casos em que x assumiria valores negativos, como na solução $x = -3$ e $y = 10$, em que $4y = 40 > -39 = 13x$. Ainda, isolaram $13x$ e encontraram a decomposição do número 13, como já apresentada por eles na primeira linha, concluindo, portanto, que y deveria ser igual a -3.

a) $13x + 4y = 1$ $x = 1$ $y = -3$, pois observa-se que $13 = 4 \cdot 3 + 1$, mas como a diferença é positiva, $4y < 13x$ e como $13x = -4y + 1$, temos $13 + (-12) = 1$

Quadro 8 - Equipe 3: questão 2a. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

No Quadro 9 vemos a estratégia usada pela equipe 5, para resolver o item c):

c) $10x - 16y = -8$
10-16=-6, se fizermos esta diferença três vezes obtemos -18, que é -10 e-8, portanto adicionamos mais um 10 para restar -8, logo x=4 e Y=3

Quadro 9 - Equipe 5: questão 2c. *Fonte: Dados da pesquisa, 2018.*

Reescrevendo em linguagem matemática a explicação feita pelos alunos no Quadro 9, teríamos:

$$10 - 16 = -6.$$

“Se fizermos essa diferença três vezes obtemos -18”:

$$3.10 - 3.16 = -18$$

“que é -10 e -8”:

$$3.10 - 3.16 = -10 - 8$$

“portanto, adicionamos mais um 10 para restar -8”,

$$3.10 - 3.16 + 10 = -10 - 8 + 10$$

$$4.10 - 3.16 = -8$$

logo, $x = 4$ e $y = 3$.

Para finalizar a análise da questão 2, trazemos as soluções apresentadas pela equipe 4. Essa equipe foi além do que havia sido previsto na atividade pois percebeu que existia um comportamento que se repetia nas soluções e começou a esboçar uma forma geral para as soluções de uma equação diofantina (análise essa que seria proposta apenas na “Parte 3” da atividade).

Observe no Quadro 10**Erro! Fonte de referência não encontrada.** que, ainda que com uma notação matematicamente imprecisa, os alunos demonstram ter compreendido que, a partir de uma solução particular, pode-se encontrar infinitas soluções para uma equação diofantina. Ainda, observaram que o valor de x está associado com o coeficiente b e o valor de y com o oposto do coeficiente a.

c) $10x - 16y = -8$

$\to \boxed{x=4;\ y=3}$

$\boxed{\to x=12;\ y=8}$

$\to x=20;\ y=13$
$\vdots$

$y_1 = y_0 + 5$
$y_2 = y_1 + 5$
$\vdots$
$y^+ = y + 5$ //

$x_0 = x_1 + 8$
$x_2 = x_1 + 8$
$\vdots$
$x^+ = x + 8$ //

d) $3x - 2y = 2$

$\to \boxed{x=2;\ y=2}$

$\to \boxed{x=4;\ y=5}$

$\to \boxed{x=6;\ y=8}$

...

$x_1 = x_0 + 2$
$x_2 = x_1 + 2$
$\vdots$
$x^+ = x + 2$ //

$y_1 = y_0 + 3$
$y_2 = y_1 + 3$
$\vdots$
$y^+ = y + 3$ //

Quadro 10 - Equipe 4: questões 2c e 2d. *Fonte: Dados da pesquisa, 2018.*

Finalizando a análise da “Parte 1”, vamos trazer algumas das hipóteses apresentadas pelos alunos para a questão: “quando uma equação diofantina tem solução no conjunto dos inteiros?”. As equipes 2 e 6 concluíram corretamente que no caso dos coeficientes a e b serem pares, o coeficiente c deve obrigatoriamente ser par também, para que haja a possibilidade da equação ter solução. Observe no Quadro 11:

③ Se a e b são pares, então $a = 2k$ e $b = 2k_1$, $a+b = c$, então c é par, logo $c = 2k_2$

Quadro 11 - Equipe 2: questão 3. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Vale ressaltar que, ainda que todos os coeficientes sejam pares, não há garantia que exista solução para a equação diofantina. Por exemplo, a equação $4x + 8y = 2$ não possui solução uma vez que $mdc(4{,}8) = 4$ e $4 \nmid 2$. É correto afirmar que se a e b forem pares, c deve ser par para que exista a chance de haver solução.

Chegando à uma conclusão similar à equipe 2, apresentamos a resposta da equipe 6 no Quadro 12. Observe que essa equipe apresentou sua resposta de maneira mais formal, semelhante à forma como o conteúdo é trabalhado ao longo da disciplina de ITN. Os alunos enunciaram a proposição, identificaram hipótese e tese, e realizaram uma demonstração por absurdo.

Para qualquer nº ímpar resultado da equação deve-se obter um coeficiente ímpar.
Hipótese: o resultado é ímpar
Tese: um dos dois coeficientes deve ser ímpar.
Demonstrando por absurdo vamos supor que todos os coeficientes são pares:
$2a+2b=1$
$2(a+b)\neq 1$
Absurdo, logo deve haver um coeficiente ímpar. cqd!

Quadro 12 - Equipe 6: questão 3. *Fonte: Dados da pesquisa, 2018.*

Analisando a hipótese da equipe 6, se c é um coeficiente ímpar ele será da forma $c = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, não sendo divisível por um número par[6]. Logo, a e b não podem ser ambos pares, pois nesse caso seu mdc também seria par, e, como c não é divisível por um número par a equação diofantina não teria solução.

No Quadro 13 vemos que a equipe 8 elaborou diversas hipóteses para casos particulares, mas não conseguiu apresentar uma única que respondesse à questão proposta. Além disso, a escrita ficou um pouco confusa, então vamos tentar interpretar o que os alunos quiseram expressar.

Hipótese 1: coeficientes primos e igualdade par a equação é válida
Hipótese 2: coeficientes par e igualdade par a equação é válida
Hipótese 3: coeficientes pares e igualdade ímpar, a equação não é válida.
Hipótese 4: Se o coeficiente ímpar somado com um coeficiente par, a igualdade é ímpar.

Quadro 13 - Equipe 8: questão 3. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Entendemos que quando os alunos escreverem na hipótese 1, "coeficientes primos e igualdade par", eles querem dizer que os coeficientes a e b são números

[6] Em sua demonstração, no lado direito da igualdade os alunos colocaram apenas o número 1 para representar um número ímpar. Não temos como saber se foi um erro na interpretação, uma distração, por não saberem exatamente como demonstrar ou algum outro motivo. Ainda assim, sua hipótese estava correta.

primos e que o coeficiente c – que se encontra "do outro lado" da igualdade – é um número par. E ainda, quando dizem "a equação é válida", na verdade querem dizer que a equação possui solução nos números inteiros. Analisando nessa perspectiva, a hipótese 1 é verdadeira, pois, se a e b são primos, então $mdc(a,b) = 1$ e $1|c$. Logo, como vimos na Proposição 1, a equação diofantina terá solução.

A segunda hipótese assume o caso onde todos os coeficientes são pares e, segundo os alunos, nesta configuração uma equação diofantina sempre teria solução. Esta conclusão é incorreta como podemos ver no contraexemplo $8x + 4y = 2$. Pela Proposição 1 temos que $mdc(4{,}8) = 4$ e $4 \nmid 2$. Logo, a equação não possui solução.

A terceira hipótese refere-se ao caso do exemplo b), $4x + 2y = 7$, no qual os alunos deduziram corretamente que não existe solução para esse tipo de equação, pois não há possibilidade de somar dois números pares e obter um ímpar. Ou ainda, pela Proposição 1, $mdc(2{,}4) = 2$ e $2 \nmid 7$.

Ainda, a quarta hipótese apresentada pela equipe afirma que se a for ímpar e b for par (ou vice-versa), c deve ser um número ímpar para que a equação diofantina admita solução. Essa hipótese não é válida, pois, na equação $3x - 2y = 2$, apresentada na letra d), foi possível encontrar solução. Além disso, pela Proposição 1, $mdc(2{,}3) = 1$ e $1 \mid 2$.

Por fim, a equipe 1 foi a única que apresentou corretamente a resposta da questão proposta. Na verdade, eles já tinham conhecimento da Proposição 1 por meio da atividade de história da matemática proposta anteriormente, então realizaram toda a atividade com essa informação em mente.

Hipótese: mdc(a,b)|c

Quadro 14 - Equipe 1: questão 3. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

2.1.2 Atividade 2 – Analisando Equações Diofantinas (Parte 2)

Conforme cada equipe finalizava e entregava a "Parte 1" da Atividade 2, recebia a "Parte 2", que consistia das questões expostas no Quadro 1. Lembramos que para essa parte da atividade a ideia era que as equipes percebessem que quando uma equação diofantina possui solução, ela tem infinitas soluções e que comparassem com outras equipes as hipóteses criadas na "Parte 1", validassem (ou não) suas hipóteses e, por fim, apresentassem suas conclusões.

No item 4 com exceção das equipes 4 e 5, todas as demais apenas apresentaram algumas das soluções encontradas por outras equipes. A equipe 5 falou sobre a forma (o "método") que outras equipes usaram para encontrar as soluções, mas não explicitou as soluções em si, como vemos no Quadro 15.

> 4 – Compare a solução encontrada na questão 2 com pelos menos outras duas equipes. As soluções foram as mesmas? Se não, anote outras soluções válidas.
>
> Encontrar a resposta através de tentativa e erro;
> Através das paridades.

Quadro 15 - Equipe 5: questão 4. Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A equipe 4 por sua vez, falou que tinha chego aos mesmos resultados das outras equipes, o que faz sentido, uma vez que esse grupo apresentou diversas soluções para uma mesma equação, chegando a esboçar inclusive, a forma geral do conjunto solução de uma equação diofantina.

Uma dificuldade encontrada nessa parte da aplicação foi o ritmo de trabalho de cada equipe. Como nem todos os alunos terminavam a atividade ao mesmo tempo, havia uma dificuldade em comparar os resultados. Ocorreu, por exemplo, que uma equipe não conseguiu entregar a "Parte 2" da atividade, pois como eles trabalharam de forma mais lenta, não conseguiram finalizar em tempo hábil.

Ainda assim, outras equipes conseguiram realizar a atividade como havia sido proposto e puderam comparar suas conjecturas. Na questão 5, das 7 equipes, 4 apresentaram como resposta que o $mdc(a, b)$ deveria dividir c. Aparentemente, ao comparar e discutir suas hipóteses com a hipótese da equipe 1, convenceram-se de que ela era uma generalização plausível. Supomos que ao se depararem com a hipótese da equipe 1, confrontaram-na com os exemplos dados e viram que ela realmente valia – pelo menos para aqueles exemplos.

Ao finalizar essa parte da atividade os alunos já tinham constatado que nem todas as equações diofantinas possuem solução e, algumas das equipes já haviam discutido e visto que o critério para verificar a existência de soluções, era que o $mdc(a,b)$ dividisse c. Essa "regra" ainda não havia sido formalizada, mas eles perceberam que nos exemplos que haviam sido propostos, ela funcionava. Por meio da "Parte 2" os alunos puderam constatar que as equações diofantinas não possuem solução única, ainda que não soubessem como encontrar essas soluções.

2.1.3 Atividade 2 – Analisando Equações Diofantinas (Parte 3)

Nessa etapa almejávamos que os alunos conseguissem encontrar a forma geral do conjunto solução de uma equação diofantina. Ou seja, eles deveriam encontrar uma "regra" que expressasse todos os pares ordenados que consistiam em solução da equação diofantina dada. Essa "regra" chamamos aqui de **Proposição 2:** Seja (x_0, y_0) uma solução particular da equação diofantina $ax + by = c$, em que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Então, essa equação admite infinitas soluções, e o conjuntos dessas soluções é dado por: $S = \left\{\left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t\right) / \, t \in \mathbb{Z}\right\}$, em que $d = mdc(a,b)$. (DOMINGUES, 2009, p. 148-149).

Observe no Quadro 1 a sequência proposta para a "Parte 3" dessa atividade. No item 6 as soluções foram convenientemente ordenadas, esperando que eles visualisassem um padrão nesse conjunto de pares ordenados. No item 7 eles já conheciam algumas soluções de cada item, por conta da questão 4 da "Parte 2", restava saber se o raciocínio usado no item 6 os ajudaria a organizar convenientemente as soluções e encontrar o mesmo padrão. Por fim, era esperado que no item 7.1 eles conseguissem deduzir a Proposição 2.

Como comentado anteriormente, nem todas as equipes tinham o mesmo ritmo de trabalho e, ao chegar na "Parte 3" muitos alunos não tiveram tempo hábil para refletir adequadamente sobre essa atividade. Assim, em alguns casos os alunos entregaram rascunhos e rabiscos que demonstram tentativas de apresentar a solução pedida, mas na maioria dos casos, sem sucesso. Vamos apresentar alguns recortes nos quais foi possível compreender a ideia ou o raciocínio utilizado pelos alunos.

Um ponto interessante a ser destacado é que a equipe 8 foi a única que conseguiu utilizar a linguagem matemática de maneira coerente de modo a expressar o conjunto solução da equação do item 6.1, como podemos ver no Quadro 16.

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

$x = 1 + 4q, q \in \mathbb{Z}$ então, $x = x_0 + bq$
$y = -3 - 13q, q \in \mathbb{Z}$ $y = y_0 + (-a)q$

Quadro 16 - Equipe 8: questão 6.1. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Contudo, mesmo tendo generalizado corretamente o conjunto solução do item 6.1, a equipe teve dificuldades em fazer o mesmo com a equação do item 7c, como pode ser observado no Quadro 17.

c) $x = -x_0 - \frac{b}{2} \cdot q$
$y = -y_0 - \frac{a}{2} \cdot q$

Quadro 17 - Equipe 8: questão 7c. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Eles conseguiram perceber que era necessário dividir o valor dos coeficientes a e b por 2 (que é o $mdc(10,16)$), mas acabaram se confundindo com os sinais da solução particular (x_0, y_0). É uma pena que eles não tenham tido tempo para finalizar o item 7.1, para que pudéssemos verificar como eles iriam proceder.

A equipe 2 chegou perto de estabelecer o conjunto solução no item 6.1 como podemos ver no Quadro 18.

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

$x = 4q_1 + 1$
$y = -(13)q_2 - 3$ $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$

Quadro 18 - Equipe 2: questão 6.1. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Essa equipe teve apenas um problema na interpretação do parâmetro (que chamaram de q). Os integrantes não perceberam que o parâmetro precisa necessariamente ser o mesmo em ambas as igualdades. Na questão 7 os alunos utilizaram a mesma ideia aplicada no item anterior, cometendo o mesmo erro com relação ao parâmetro, como vemos no Quadro 19.

7 – Apresente pelo menos três soluções das equações dos itens c) e d).

c) $10x - 16y = -8$

$x = 16 \cdot q_1 + 4$
$y = 10 \cdot q_1 + 3$

$x = 4$ $y = 3$
$x = 20$ $y = 13$
$x = 36$ $y = 23$

Quadro 19 - Equipe 2: questão 7. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Com relação à equação diofantina $10x - 16y = -8$, devido às soluções particulares que haviam destacado, não perceberam que estavam "faltando soluções" no conjunto apresentado. Essas "soluções faltantes", como por exemplo, $x = 12$ e $y = 8$ só são encontradas (na solução geral) quando dividimos os coeficientes a e b por 2, como fez a equipe 8. Ainda assim, é interessante observar que a generalização apresentada pela equipe, condiz com os pares ordenados que eles haviam encontrado como solução para a equação diofantina. Então, nesse caso, é possível que se tivessem sido dadas outras soluções (como em 6.1), os alunos tivessem conseguido deduzir o conjunto solução corretamente.

Vemos no Quadro 20 que a equipe 3 compreendeu a forma geral do conjunto solução, contudo não soube expressar corretamente em linguagem matemática.

$(13x + kb, + (4y - ka) = 1$

Quadro 20 - Equipe 3: questão 6.1. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

A equipe 7 desenvolveu algo semelhante ao que foi apresentado no Quadro 20, contudo não conseguiu unir todas as informações e expressar matematicamente. Observe que na questão 6 eles utilizam o x, mostrando que percebem, por meio das soluções apresentadas no enunciado, a necessidade da existência do parâmetro, a resolução pode ser vista no Quadro 21.

$13.(1+4x)+4.(-3-13x)=1$	$x=1\,e\,y=-3$
	$x=5\,e\,y=-16$
	$x=9\,e\,y=-29$
	$x=13\,e\,y=-42$

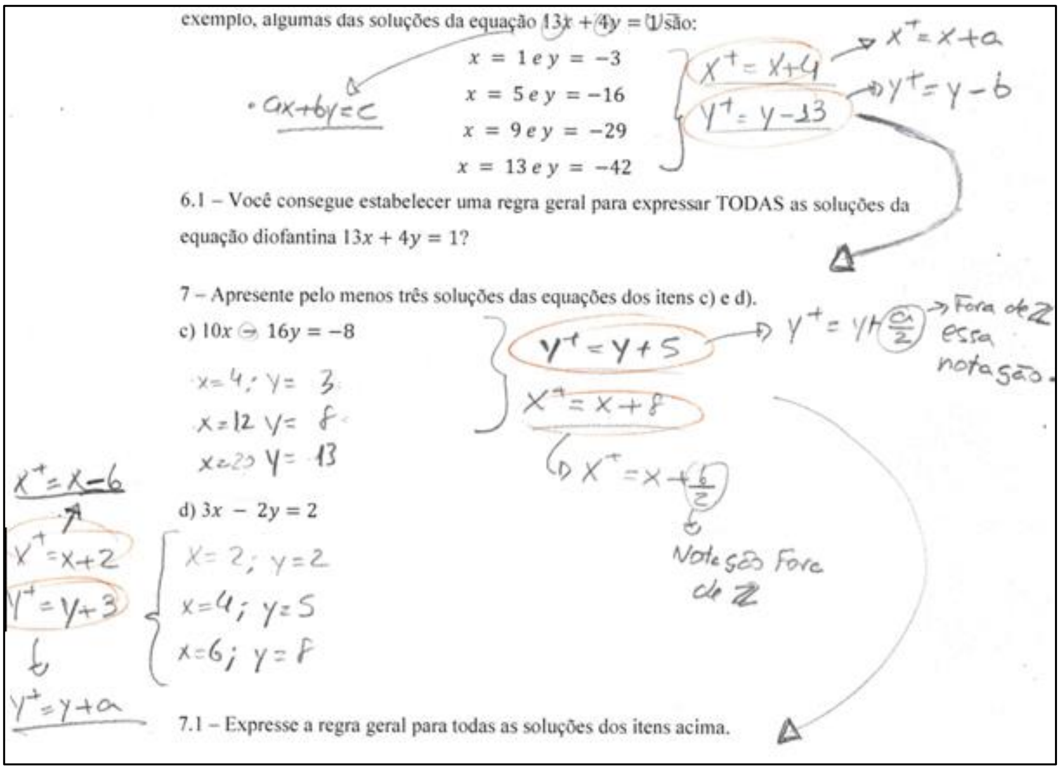
Quadro 21 - Equipe 7: enunciado. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Porém, quando foi pedido para generalizar o conjunto solução, o parâmetro “some”. Além disso, eles colocam os coeficientes 13 e 4 multiplicando toda a expressão entre parêntesis (Quadro 22). De fato, qualquer solução particular que for substituída em x_0 e y_0 irá gerar uma igualdade verdadeira. Porém, não era essa a proposta do exercício.

$$13.(x_0+4)+4.(y_0-13)=1$$

Quadro 22 - Equipe 7: questão 6.1. *Fonte: Dados da pesquisa, 2018.*

Um raciocínio distinto dos apresentados até aqui, foi desenvolvido pelas equipes 4 e 5. Já destacamos no Quadro 10 que a equipe 4 havia começado a esboçar o conjunto solução para uma equação diofantina. No Quadro 23 vemos que, de maneira geral eles compreendem o comportamento do conjunto solução, contudo, a regra geral apresentada por eles não reflete todas as soluções possíveis em função de um parâmetro. Na notação deles cada solução depende da solução imediatamente “anterior”, necessitando que o processo para encontrar as soluções seja realizado de maneira sucessiva. Vale destacar que na letra c) os alunos perceberam que era necessário fazer a divisão dos coeficientes por 2, mas interpretaram que essa divisão não seria um número inteiro. É bastante intigrante essa observação feita por eles, uma vez que eles mesmos já haviam dividido o 10 e o 16 por 2, e encontrado valores inteiros, mas ao fazer a divisão de a ou b por 2, por algum motivo eles não conseguiram relacionar que a resposta seria um número inteiro.



exemplo, algumas das soluções da equação $13x + 4y = 1$ são:

$ax+by=c$

$x = 1$ e $y = -3$
$x = 5$ e $y = -16$
$x = 9$ e $y = -29$
$x = 13$ e $y = -42$

$x^+ = x+4 \rightarrow x^+ = x+a$
$y^+ = y-13 \rightarrow y^+ = y-b$

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

Δ

7 – Apresente pelo menos três soluções das equações dos itens c) e d).

c) $10x - 16y = -8$

$x=4$; $y=3$
$x=12$ $y=8$
$x=20$ $y=13$

$y^+ = y+5 \rightarrow y^+ = y+\frac{a}{2}$ → Fora de $\mathbb{Z}$ essa notação.
$x^+ = x+8$
$\rightarrow x^+ = x+\frac{b}{2}$
Notação Fora de $\mathbb{Z}$

d) $3x - 2y = 2$

$x=2$; $y=2$
$x=4$; $y=5$
$x=6$; $y=8$

$x^+ = x-b$
$x^+ = x+2$
$y^+ = y+3$
$y^+ = y+a$

7.1 – Expresse a regra geral para todas as soluções dos itens acima.

Δ

Quadro 23 - Equipe 4. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Desenvolvendo um raciocínio semelhante ao da equipe 4, temos no Quadro 24 a atividade entregue pela equipe 5. Observe que eles usam a mesma ideia de recorrência, em que cada solução depende da solução imediatamente “anterior”, não conseguindo estabelecer uma relação que dependa de um parâmetro. Essa equipe, contudo, vai adiante, apresentando uma solução em função dos coeficientes a e b e não levando em conta apenas o valor numérico dos exemplos apresentados. Ao fazer uso dessa notação parecem ter compreendido que a “regra geral” seria válida para outras equações diofantinas. No tópico 7.1 eles destacam que os coeficientes a e b devem ser divididos pelo $mdc(a, b)$, contudo, fica clara a confusão e a dúvida em determinar os sinais dessa parcela.

equação. Na verdade, cada uma das equações admite infinitas soluções. No item a), por exemplo, algumas das soluções da equação $13x + 4y = 1$ são:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \text{ e } y = -3 \\ x = 5 \text{ e } y = -16 \\ x = 9 \text{ e } y = -29 \\ x = 13 \text{ e } y = -42 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^+ = x+4 = x+(b) \\ y^+ = y-13 = y+(-a) \end{array}$$

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

$$\left.\begin{array}{l} x = 1,\ y = -3 \\ x = 5,\ y = -16 \\ x = 9,\ y = -29 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^+ = x+4 = x+(-b) \\ y^+ = x-13 = y+(-a) \end{array}$$

7 – Apresente pelo menos três soluções das equações dos itens c) e d).

c) $10x - 16y = -8$

$$\left.\begin{array}{l} x = -4,\ y = -2 \\ x = 4,\ y = 3 \\ x = 12,\ y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^+ = x+8 = x+(-\frac{b}{2}) \\ y^+ = y+5 = y+(\frac{a}{2}) \end{array}$$

d) $3x - 2y = 2$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2,\ y = 2 \\ x = 4,\ y = 5 \\ x = 6,\ y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^+ = x+2 = x-b \\ y^+ = y+3 = y+(-a) \end{array}$$

7.1 – Expresse a regra geral para todas as soluções dos itens acima.

$$x^+ = x + \left(\pm \frac{b}{mdc(a,b)}\right)$$
$$y^+ = y + \left(\pm \frac{a}{mdc(a,b)}\right)$$

Quadro 24 - Equipe 5. Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Nesta atividade ficou evidente a dificuldade dos alunos em expressar em linguagem matemática um comportamento que eles conseguiam compreender, pois percebiam “o que acontecia” de uma solução para a outra, e, além disso eram capazes de explicar em linguagem natural. Vimos que não estavam habituados a utilizar um parâmetro para descrever um comportamento.

Na “Parte 4” a ideia era que as equipes comparassem a forma geral deduzida por cada uma, validando-a ou refutando-a. Contudo, em função da falta de tempo durante a aula, nenhuma das equipes realizou essa parte da atividade.Certamente teria sido uma discussão bastante produtiva, contudo, acreditamos que a não realização dessa parte da atividade não tenha gerado prejuízos para a compreensão do conteúdo e da generalização, uma vez que a Proposição 2 foi discutida, explicada e demonstrada na aula seguinte.

3. Para fim de conversa (por enquanto)...

Para finalizar a conversa por aqui (neste artigo), destacamos que acreditamos que trabalhar com propostas "não tradicionais" de ensino durante a formação inicial pode instigar os futuros professores a implementarem também em sua prática, propostas e estratégias diversificadas de ensino, buscando aquela que melhor se adeque ao objetivo, ao conteúdo, à turma, ao ambiente escolar, etc.

Entre essas propostas destacamos o trabalho em equipe, a criação e a validação de hipóteses e a análise do erro. A riqueza das discussões nas equipes é impossível de ser reproduzida aqui, mas o diálogo entusiasmado (ou decepcionado) quando alguma conjectura criada por eles funcionava (ou não) é inspirador. A criatividade dispendida na criação de hipóteses, a validação, a chance de errar, repensar e corrigir a hipótese diminuem o "peso" do erro e demonstram o pensamento matemático e o desenvolvimento da ciência matemática.

Percebemos como aspectos a melhorar nessa atividade a busca pelo desenvolvimento de um amadurecimento da linguagem matemática, a discussão e compreensão sobre o parâmetro e a realização de um levantamento de dúvidas e erros a fim de discutí-los.

Referências

DOMINGUES, H.H. Fundamentos de Aritmética. Florianópolis: Editora da UFSC, 2009. P. 148 – 149.

KIECKHOEFEL, D. E. N. Equações Diofantinas Lineares: entre o formalismo do ensino superior e a sala de aula da Escola Básica. 2019. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional – Joinville, 2019.