



Exploração de funções polinomiais de 1º grau no GeoGebra

Exploring 1st degree polynomial functions in GeoGebra

Carolina Cordeiro Batista¹
Rosa Monteiro Paulo²

Resumo: Neste texto discutimos a experiência vivenciada em uma aula de matemática, sobre funções polinomiais do 1º grau, com o *software* GeoGebra. A aula foi planejada e desenvolvida por três professores de matemática de uma escola pública de educação básica da rede estadual paulista, participantes de um grupo de formação. O grupo foi constituído para a produção de dados de uma pesquisa de Doutorado, em andamento, e vem se reunindo em encontros quinzenais desde o 2º semestre de 2018. Suas ações são orientadas pelo modelo de formação do estudo de aula. Seguindo esse modelo, já elaborou, desenvolveu e discutiu aulas com pelo menos três conteúdos, na perspectiva de tarefas exploratórias e investigativas. A aula discutida nesse texto, que foi filmada, foi desenvolvida com uma turma de alunos do 3º ano de Ensino Médio, que, organizados em duplas ou trios, responderam aos questionamentos feitos pelos professores, construíram e interpretaram gráficos e manipularam controles deslizantes construídos no GeoGebra. Parte dessas gravações foram transcritas e analisadas para orientar as discussões neste texto. Interpretando o que foi vivenciado, serão expostas compreensões acerca da produção de conhecimento matemático dos alunos quando eles se envolvem em uma atividade matemática com tecnologias.

Palavras-chave: Educação Matemática. tecnologias digitais. investigação matemática. estudo de aula.

Abstract: In this text we will discuss the experience in a mathematics class about 1st degree polynomial functions with GeoGebra software. The class was planned and developed by three math teachers from a public elementary school in São Paulo state, participating in a formation group. The group was constituted to produce data from an ongoing doctoral research, and has been meeting in biweekly meetings since the second semester of 2018, guiding its actions through the model of formation of the lesson study. Following this model, has already elaborated, developed and discussed classes with at least three contents, from the perspective of exploratory and investigative tasks. The class discussed in this text, which was filmed, was developed with a class of high school students, who, organized in pairs or threes, answered questions made by teachers, built and interpreted graphics and manipulated sliders built in GeoGebra. Part of these recordings were transcribed and analyzed to guide the discussions

¹ Doutoranda em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus de Rio Claro, ca.cbatista13@gmail.com.

² Doutora em Educação Matemática, Professora do Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus de Guaratinguetá, rosa.paulo@unesp.br.



in this text. Interpreting what has been experienced, understandings will be exposed about the production of mathematical knowledge of students when they engage in a mathematical activity with technologies.

Keywords: Mathematics education. digital technologies. mathematical investigation. lesson study.

1. Introdução

Muitas são as pesquisas na área de Educação Matemática que vêm discutindo modos de desenvolver práticas de ensino que tornem os alunos mais ativos. Para isso destacamos a contribuição de tarefas de investigação e exploração matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

Tarefas com essa característica foram eleitas por professores de matemática, participantes de um grupo de formação continuada, para serem estudadas e elaboradas visando um trabalho em sala de aula com o *software* GeoGebra. Esse grupo foi constituído com três professores de uma Escola de Tempo Integral da rede estadual paulista de ensino, denominados: Luciana, Euclides e Leonardo³, e pela pesquisadora, para a produção de dados de uma pesquisa de Doutorado, em andamento. Na pesquisa busca-se investigar o modo pelo qual o professor se percebe sendo professor com tecnologias. O trabalho no grupo segue os preceitos do estudo de aula, que iremos discutir neste texto. Os encontros são realizados na escola, quinzenalmente, com duração de cerca de uma hora e meia e estamos trabalhando desde o 2º semestre de 2018.

Nas próximas seções trazemos um recorte de uma das experiências vivenciadas no contexto do grupo de formação de professores de matemática, apresentamos a discussão de uma aula elaborada pelo grupo e desenvolvida pelo professor Euclides na qual trabalhou-se com tarefas exploratórias sobre o conteúdo “Funções Polinomiais de 1º grau”, por meio do GeoGebra.

2. Compreensões sobre o estudo de aula

³ Visando preservar a identidade dos professores adotamos, para eles, nomes fictícios.



O estudo de aula é um modelo de formação de professores que nos últimos anos passou a ser desenvolvido por professores e pesquisadores de diversas partes do mundo (TAKAHASHI; MCDUGAL, 2016; RICHIT; PONTE, 2019).

Originou-se no Japão por volta do século XIX a partir de um método de formação que foi incentivado e implementado pelo governo japonês. Os professores japoneses eram incentivados a assistir aulas de professores ocidentais observando o que era feito e analisando possibilidades de fazer adaptações para suas aulas. A partir das discussões e adaptações feitas, os professores japoneses desenvolviam aulas no ensino fundamental sendo observados por outros docentes e, após a aula, reuniam-se para discutir essas observações (FELIX, 2010). Posteriormente, esse modelo se disseminou pelo mundo tornando-se foco de diversas pesquisas desenvolvidas em países como Portugal e Brasil.

O modelo sofreu adaptações ao longo dos anos, mas, de modo geral, se desenvolve a partir da constituição de um grupo de professores que possuem um interesse comum e que mereça discussão, por exemplo, uma disciplina (matemática, português, etc.) ou um tema (saúde, tecnologia, etc.). O grupo, com a ajuda de um pesquisador, se reúne para o desenvolvimento de quatro etapas: definição de objetivos, planejamento de uma aula, desenvolvimento da aula por um membro do grupo, com a observação dos demais, e discussão pós-aula (BATISTA, 2017; CURI; NASCIMENTO; VECE, 2018). Na maioria das vezes essas aulas são desenvolvidas no contexto de trabalho do professor, isto é, em sua escola.

Uma das principais características do estudo de aula é que todas as suas etapas têm como foco o aluno. Com esse foco, professores e pesquisadores se reúnem e “definem objetivos considerando as dificuldades de aprendizagem dos alunos; planejam e desenvolvem uma aula; analisam as ações dos alunos na aula” (RICHIT; PONTE, 2019, p. 943), discutem o raciocínio expresso na solução da tarefa, os questionamentos que os alunos fazem para o professor ou seus colegas presentes na aula, os erros e dificuldades apresentados, sempre levando em consideração o entendimento do aluno. Assim, por meio do estudo de aula, pode-se oportunizar a



aprendizagem dos alunos e promover o desenvolvimento profissional dos professores, incentivando-os à reflexão e a colaboração (MERICHELLI; CURI, 2016). Há, nesse espaço formativo, um trabalho de discussão e busca por melhoria no modo de ensinar, antes que o aperfeiçoamento de planos de aula (TAKAHASHI; MCDUGAL, 2016).

Além disso, o foco no aluno pode contribuir para que as crenças dos professores em relação às possibilidades de conhecimento do aluno sejam reinterpretadas fazendo com que eles reduzam o uso de avaliações com foco em habilidades definidas previamente (LEWIS et al., 2012), dando-lhes abertura para buscar novos modos de ensinar e avaliar.

Seguindo as etapas do estudo de aula, os professores elaboraram e desenvolveram tarefas na perspectiva da investigação e exploração matemática.

3. Exploração e investigação nas aulas de matemática: algumas possibilidades

“Pode o trabalho de investigação dos matemáticos servir de inspiração para o trabalho a realizar por alunos e professores nas aulas de Matemática?” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016, p. 9). Essa pergunta posta pelos autores nos faz considerar as possibilidades de o professor de matemática vir a desenvolver uma prática em sala de qual que oriente a atividade dos alunos para a investigação, prática atribuída ao fazer de matemáticos profissionais.

A investigação, de acordo com Ponte (2003, p. 2), é a busca por conhecer, compreender e encontrar soluções para os problemas, uma prática de ensinar e aprender “que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos” (PONTE, 2003, p. 2). Isso nos leva a interpretar que o “investigar” pressupõe ações que levem os alunos a um envolvimento ativo na busca por uma solução para os problemas que lhes são propostos em aula, tornando-os participativos em todas as etapas dessa busca. É, portanto, um modo de ser em que os alunos, atentos às possibilidades que se abrem pela tarefa proposta, desenvolvem ações seguindo critérios próprios de escolha, que levem a produção de conhecimento matemático, pois trabalhar com investigação possui “uma vertente importante de



trabalho matemático como trabalhar com definições, classificar objetos, relacionar propriedades” (PONTE; QUARESMA; BRANCO, 2017, p. 216). Ainda que essas possibilidades não envolvam investigações tão complexas quanto às desenvolvidas pelos matemáticos, são relevantes a um modo de agir em sala de aula que preze pelo desenvolvimento da autonomia do aluno.

Investigar não é trabalhar com problemas muito complexos, mas envolver-se com questões que instigam e que não se apresentam de forma clara, devendo ser estudadas para serem compreendidas (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016).

Logo, uma investigação muitas vezes é também tratada como sinônimo, ou como uma atividade muito próxima, de um trabalho exploratório. Considerando que ambas são desenvolvidas no âmbito de tarefas abertas, o que as diferencia é, principalmente, o quanto essas tarefas apresentam desafios mais ou menos elevados. Na investigação há tarefas que envolvem desafios com um nível de dificuldade mais elevado cujo objetivo é desenvolver conceitos novos e favorecer o uso criativo dos conceitos já conhecidos. Nas tarefas de exploração o nível de dificuldade é mais reduzido do que na investigação, embora também se objetive a formação de conceitos (PONTE; QUARESMA, 2015). Para Ponte (2003)

muitas vezes não se distingue entre tarefas de investigação e de exploração, chamando-se “investigações” a todas elas. Isso acontece, muito provavelmente, porque é complicado saber à partida qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos (PONTE, 2003, p. 5).

Ponte e Quaresma (2015) lembram que, tanto com tarefas exploratórias quanto investigativas, há possibilidade de trabalhar na sala de aula de modo diverso: por meio de um trabalho coletivo, em pequenos grupos, em pares ou individualmente. No entanto, ressaltam os autores que, entre as possibilidades que se abrem no trabalho em grupo ou por pares, há o compartilhamento de compreensões entre os alunos, há a ajuda mútua o que consideram um modo de favorecer o trabalho colaborativo e a produção de conhecimento com a discussão e negociação de diversos pontos de vista.



À medida que possibilita aos alunos assumir um papel ativo na busca por soluções para as tarefas, o trabalho com investigação e exploração matemática favorece a construção de estratégias próprias de resolução, pois leva os alunos a interpretar questões com diversos tipos de representações matemáticas, instigando-os a mobilizar conhecimentos, construir e aprofundar ideias matemáticas, conceitos e procedimentos, pois eles, a princípio, não possuem uma solução para as questões – afinal devem ser tarefas desafiadoras. Além disso, essas tarefas podem favorecer o desenvolvimento das capacidades de comunicação e argumentação, se os alunos forem encorajados a compartilhar suas compreensões com os colegas (PONTE; QUARESMA, 2015) ou com o professor, dispondo-se a participar de discussões coletivas acerca de ideias diferentes.

Desse modo, orientados pelas possibilidades do trabalho investigativo e exploratório em matemática, propusemos aos professores do grupo de estudo de aula, dar início ao planejamento de sua primeira aula com o *software* GeoGebra.

4. O grupo em atividade: o planejamento da aula

A aula que será discutida neste texto foi planejada nos dois primeiros encontros do grupo. Os professores consideraram uma tarefa que estava prevista para ser trabalhada com as turmas do professor Euclides, com alunos do 3º ano do Ensino Médio. A tarefa, era proposta no Caderno do Aluno do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2014, p. 67), material oferecido pela Secretaria Estadual da Educação. Ela não previa muitas possibilidades de exploração ou investigação, podendo ser desenvolvida com lápis e papel. Então, orientados pela pesquisadora, os professores se empenharam na elaboração de um roteiro com questões que os alunos deveriam responder por meio de explorações que seriam feitas no GeoGebra. As explorações sugeridas avançavam em relação ao que era solicitado na tarefa do Caderno do Aluno.

O *software* GeoGebra foi o escolhido pelos professores em decorrência da familiaridade que tinham com ele e porque estava instalado nos computadores da escola. Compreendendo algumas das possibilidades do GeoGebra e a dificuldade dos



alunos em relação à interpretação e à visualização de gráficos, os professores elaboraram tarefas de construção e interpretação de gráficos e de construção e manipulação de controles deslizantes para explorar os coeficientes angular e linear de uma função polinomial de 1º grau. O objetivo era que os alunos compreendessem o que tais coeficientes significam relativamente à posição da reta que representava o gráfico da função.

Com o roteiro pronto, os professores elegeram a data para o desenvolvimento da aula, que foi gravada em vídeo. A gravação da aula, assim como da tela dos computadores dos alunos (com um aplicativo), foi transcrita e analisada e orientou as discussões a seguir.

5. Os alunos em atividade: compreensões sobre uma aula com o GeoGebra

A aula com o GeoGebra, para investigar “Funções polinomiais do 1º grau”, foi desenvolvida no dia 27 de setembro de 2018 com os alunos do 3º ano do Ensino Médio. O professor Euclides foi o responsável por conduzir as tarefas da aula e contou com a colaboração da professora Luciana e da pesquisadora, que estavam presentes assumindo o papel de observadoras e auxiliando os alunos com suas dúvidas em relação às ferramentas do *software*.

Havia, na turma, cerca de 20 alunos na faixa etária entre 16 e 18 anos, todos cursando o 3º ano pela primeira vez. Os alunos se organizaram em duplas ou trios, a pedido do professor. Na sala não havia computadores suficientes para todos os alunos e, além disso, os professores consideraram que o trabalho em dupla iria favorecer o diálogo entre os alunos.

O professor Euclides iniciou sua aula entregando aos alunos o roteiro elaborado pelo grupo. Leu juntamente com os alunos as questões e perguntou-lhes se havia alguma dúvida com relação ao que era solicitado. Como não houve manifestação de dúvida, os alunos iniciaram a exploração com o *software* e responderam às questões da primeira parte do roteiro (Figura 1).



1. O preço P a ser cobrado em uma corrida de táxi é composto por uma quantia a fixada, igual para todas as corridas, mais uma parcela variável, que é diretamente proporcional ao número x de quilômetros rodados: $P = a + bx$ (b é o custo de cada quilômetro rodado).

Em certa cidade, temos $P = 15 + 0,8 \cdot x$ (P em reais e x em quilômetros).

- Esboce o gráfico no Geogebra.
- Qual é o preço cobrado por uma corrida de 12km, 3km, 4km.
- Qual é a diferença de preço entre uma corrida de 3 km e outra de 4km? Como você observa essa diferença no gráfico?
- Em uma cidade vizinha a parcela variável é de R\$ 1,20. Esboce o gráfico, no Geogebra, do preço a ser pago na cidade vizinha. Qual a diferença entre os dois gráficos?

Figura 1: Primeira parte do roteiro

Fonte: Elaborado pelo autor.

No decorrer da tarefa os alunos solicitaram algumas vezes a ajuda do professor e das colaboradoras para dúvidas referentes às ferramentas do GeoGebra. Tiveram dificuldades com os conteúdos matemáticos e para interpretar o que era exigido na tarefa. Uma pergunta muito comum no início das explorações foi: “Oh Sor (professor), para achar os 12 quilômetros é para fazer no GeoGebra ou no caderno?” (Alice, sujeito da pesquisa, 2018).

Buscando cumprir o que era solicitado, os alunos se abriram ao diálogo com o professor e com os colegas da turma. No diálogo expuseram erros, expressaram seu raciocínio e suas dificuldades e questionaram o professor. Em um dos momentos da aula, o professor Euclides observava as alunas Ana e Maria⁴ esboçando o gráfico da função “ $f(x) = 15 + 0.8x$ ”, representado na Figura 2.

⁴ Tal como fizemos com os professores, os nomes dos alunos também são fictícios para manter o anonimato.

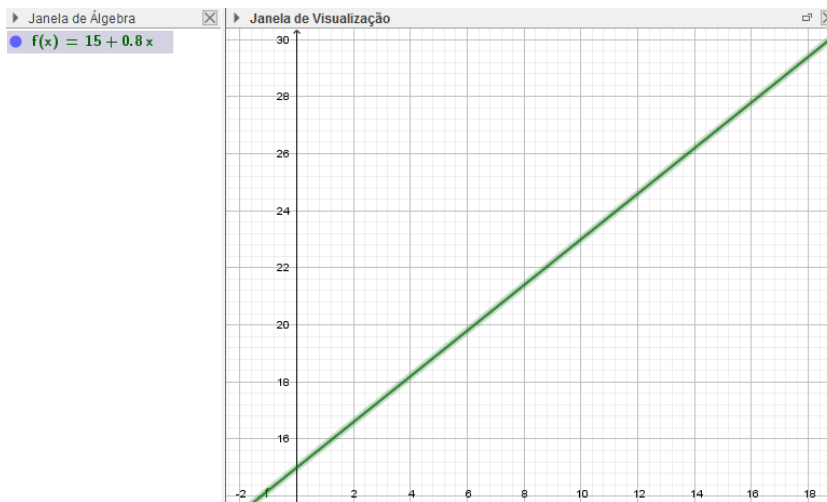


Figura 2: Esboço do gráfico de uma função de 1º grau no GeoGebra
Fonte: Elaborado pelas alunas Ana e Maria

Com o gráfico na tela do GeoGebra, as alunas observaram-no por alguns instantes e começaram a discutir estratégias para responder ao item “1-b” do roteiro, mas não conseguiram chegar a uma conclusão. Maria então, voltando-se para o professor Euclides, que ainda as observava, perguntou:

Maria: Tem que substituir o 12 pelo x?

Professor: Isso, com cálculos vocês respondem, mas e no gráfico? /.../ Vocês conseguem colocar um ponto lá no gráfico? Quanto vale esse P (preço da corrida de táxi para 12 quilômetros)?

Maria: É 24 (olhando os cálculos no caderno)?

Professor: Cadê o x valendo 12 nesse gráfico?

Ana: Aqui! Olha! (apontando o ponto (12,0)).

Professor: E onde que está o meu P quando x é 12?

Maria: Tá aqui (apontando para o caderno).

Professor: Então, cadê o P no gráfico? /.../ Você mostrou para mim onde está o x igual a 12. Agora mostra para mim quanto é o preço quando x é igual a 12 quilômetros.

Ana: É aqui no 24?

Professor: Você consegue marcar esse ponto?

Ana: Aqui? (marcou o ponto (12.01, 24.61)) Tá certo?

O modo como Maria realiza as perguntas ao professor e responde aos seus questionamentos sugere que, para ela, a realização de cálculos no caderno, substituindo o valor de x por 12 na função, é o modo pelo qual é possível encontrar



uma solução para aquele questionamento. A aluna não vê como, graficamente, pode inserir o ponto que havia calculado. O professor, atento à fala da aluna, espera que ela identifique essa possibilidade e vai questionando-a. Ana, atenta ao diálogo entre Maria e o professor, tem a iniciativa de tentar mostrar a solução gráfica que o professor solicitava e, embora os pontos apontados pela aluna - (12.01, 24.61) - não representasse precisamente os valores esperados para a solução, indicavam uma compreensão do modo de obter graficamente a solução para o problema.

Esses modos de compreender a tarefa também se repetiram na exploração de outros alunos. Em uma das duplas, o aluno Marcos (sujeito da pesquisa, 2018) fez uma solicitação ao colega: “pode criar um ponto ali (na reta) e mexe até o 12 /.../ dá 24.6”. Em sua fala ele sugere ao colega criar um ponto sobre a reta e arrastar esse ponto. Observa suas coordenadas na janela de álgebra do *software* até encontrar a coordenada y do ponto (que representava o preço P) no momento em que o ponto estava sobre a coordenada x igual a 12. Essa estratégia também apareceu associada aos cálculos, ou seja, alguns alunos a utilizaram para conferir se os cálculos realizados no caderno estavam corretos.

Na resolução do item c, novamente houve muita discussão entre os alunos para comparar os preços das corridas de 3 e 4 quilômetros. Uma delas se deu entre Alice e Alberto

Alice: É um quilômetro a mais, então dá um real mais caro.

Alberto: Não! É 80 centavos mais caro.

Alice: Por quê?

Alberto: Por causa daqui, olha! (referindo-se ao coeficiente angular 0,8 da função).

Alice: Ah! Então a diferença é que um é mais caro que o outro?

O professor percebendo a discussão dos alunos resolveu intervir.

Professor: Sim! Mas como você observa isso no gráfico?

Alice: Mas como que a gente observa isso no gráfico? No gráfico a gente só vai olhar e vai ver que para 4 quilômetros (o ponto) tá mais alto, então é mais caro (que a corrida de 3 quilômetros).

O aluno Alberto explica para a colega Alice que sua resposta estava correta, havia uma diferença de preços entre as corridas de modo que a corrida de 4



quilômetros seria a mais cara. Entretanto, ressaltou que a pergunta do professor referia-se a quanto essa corrida seria mais cara, ou seja, qual seria o valor da diferença de preço. Ele mostra para Alice que, se na função “ $f(x) = 15 + 0,8x$ ” cada x estava sendo multiplicado por 0,8, então essa seria a diferença de preço para cada 1 quilômetro rodado. A aluna registrou no roteiro da dupla o que compreendeu da explicação do colega e disse: “Ah! Então já sei, a diferença é 0,8 para cada 1 quilômetro, tá bom pra você?” (Alice, sujeito da pesquisa, 2018). Alguns alunos recorreram aos cálculos e não explicaram como esse valor poderia ser visualizado no gráfico, isto é, não se referiram a diferença observada no eixo y .

No item d, de forma semelhante ao que ocorreu no item c, os alunos conseguiram compreender que a diferença entre os dois gráficos referia-se ao preço: ser mais caro em uma das cidades. Mas, dessa vez, a maioria identificou que no gráfico com inclinação maior o preço aumentava de forma mais rápida.

Além das explorações propostas, outras foram criadas pelos alunos. Considerando o modo como o gráfico foi construído no GeoGebra, com coordenadas positivas e negativas para x e y , diferente do gráfico construído pelos alunos anteriormente em sala de aula, que continha apenas coordenadas positivas, os alunos resolveram marcar pontos sobre as coordenadas negativas da reta. O aluno Alberto (sujeito da pesquisa, 2018) após marcar o ponto $(-7.05, 9.36)$ questionou: “Pode ter valores negativos para x ?”. Sua colega de dupla diz: “Ah sim! Se ele (o táxi) está andando de ré!” (Alice, sujeito da pesquisa, 2018). O professor, ouvindo o questionamento do aluno, resolveu fazer uma intervenção coletiva para concluir que se deveria considerar apenas valores positivos para x . Em seguida os alunos passaram para as tarefas da segunda parte do roteiro (Figura 3).



2. Crie controles a e b, sendo:

a com intervalo de -5 a 5 e incremento 0,1;

b com intervalo de 0 a 20 com incremento 0,1;

Responda o que você observa quando:

a) $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$;

b) os valores de b são modificados;

Figura 3: Segunda parte do roteiro
Fonte: Elaborado pelo autor

Esse momento da tarefa foi visto como uma novidade para os alunos, considerando que seria a primeira vez que trabalhariam com controles deslizantes. Por esse motivo, eles apresentaram mais dificuldades com as ferramentas do *software*, solicitando a presença do professor mais vezes. Percebendo que havia uma dificuldade geral, o professor Euclides optou por construir os controles deslizantes juntamente com a turma.

Com os controles deslizantes prontos, o professor Euclides solicitou que, na função " $f(x) = 15 + 0.8x$ ", os alunos substituíssem o valor de 15 por b (controle deslizante) e o valor de 0.8 por a (controle deslizante), para que, ao moverem os controles deslizantes a e b, os coeficientes linear e angular da função fossem alterados e eles pudessem perceber a modificação da reta (do gráfico da função).

Os alunos manipularam os controles deslizantes, interpretando o que se mostrava na tela do GeoGebra. Ao darem início a questão 2, item b, o professor Euclides observou que o aluno João tinha duas funções representadas na tela de seu computador (Figura 4) e demonstrava não saber qual delas deveria observar para responder o questionado, pois ainda não havia associado os controles deslizantes aos valores representados na função.

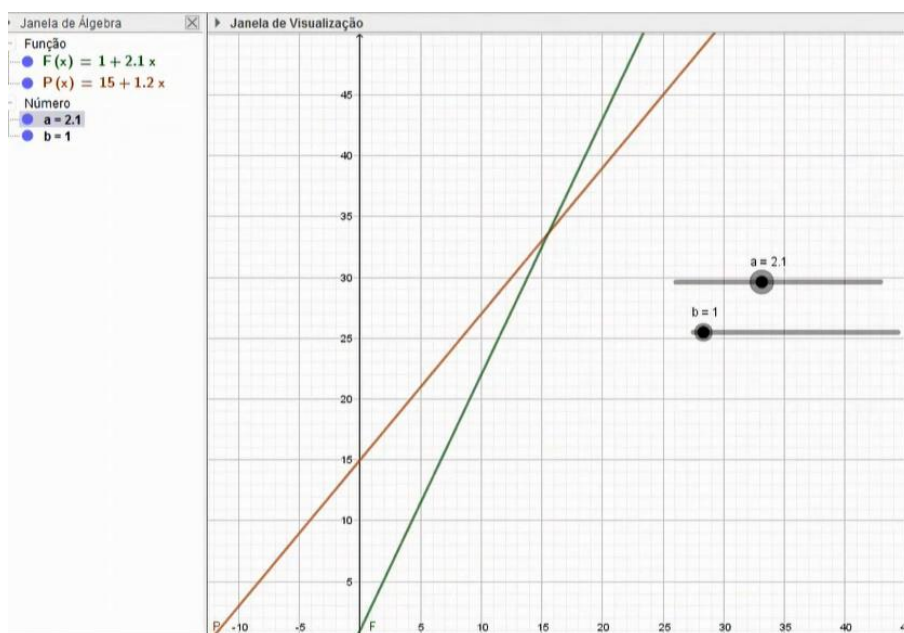


Figura 4: Função Polinomial de 1º grau com coeficientes associados a controles deslizantes
Fonte: Elaborado pelo aluno João

O professor aproximou-se do aluno e foi orientando-o.

Professor: Mexe nos controles (deslizantes)! É a função verde, olha! Agora responde aí as próximas questões. Pode fazer para “a” maior do que 0, “a” menor do que 0.

João: (movendo os controles deslizantes) “a” igual a 0 fica tudo reto.

Professor: Não fala não! Escreve as suas observações aí para ver o que acontece.

José: Olha o que acontece (aumentando o valor do controle deslizante a)! Vai entortando (referindo-se à reta)! Quando o “a” fica maior vai entortando. Aqui, olha (moveu o controle “a” de 0 até 5 e depois de 5 a 0)!

João: Deixa eu ver.

A partir da orientação do professor, João moveu o controle deslizante para a posição “a” igual a 0 e respondeu-lhe que, para esse valor de “a”, a função “fica tudo reto” (João, sujeito da pesquisa, 2018), referindo-se à representação da reta de uma função constante “ $f(x) = 1$ ”, conforme observava na tela do computador. O professor, com receio de que outros alunos escutassem e copiassem sua resposta, sugere que, ao invés de falar em voz alta, registrasse o que observava. Nesse momento, José, que estava no computador ao lado e observava a conversa, resolveu ajudar o colega,



mostrando-lhe o que acontece quando o valor do controle deslizante “a” é aumentado. Para ele, quando isso acontece a reta “vai entortando”, ou seja, sua inclinação aumenta.

A fala dos alunos, apesar de não ter a linguagem formal que expressa a função constante e a inclinação da reta, mostra que eles perceberam que aqueles movimentos representavam um modo de alterar o gráfico da função, transformando-o de acordo com características específicas: uma “reta” não inclinada, quando não possuía coeficiente angular ($a=0$), ou ter um aumento na inclinação à medida que o valor de “a” aumenta ($a>0$). Os alunos demonstraram compreender o esperado pelo professor e essa exploração possibilitou ao professor falar sobre função constante e coeficiente angular da reta.

Como ampliação da tarefa, nos minutos finais da aula, o professor Euclides decidiu explorar uma função polinomial de 2º grau. Para isso, solicitou aos alunos que construíssem o controle deslizante c e alterassem a função para “ $f(x)=ax^2 + bx + c$ ”, de modo que ao moverem os controles deslizantes a, b e c, o gráfico da função seria alterado, representando uma parábola.

Os alunos fizeram as explorações com os controles deslizantes. Alguns perceberam que se o controle deslizante “a” fosse maior que 0, então a concavidade da parábola estava voltada para cima e quando fosse menor que 0 a concavidade da parábola seria voltada para baixo. No entanto, não houve tempo para explorarem os controles deslizantes b e c.

Como último momento da aula, um dos alunos questionou o motivo pelo qual o controle deslizante “a” igual a 0 fazia o gráfico deixar de ser uma curva e se tornava uma reta. O professor compartilhou a pergunta com a turma e uma aluna, Renata, prontamente respondeu: “Eu coloquei assim: quando (o controle deslizante) “a” é igual a 0 fica uma equação de 1º grau” (Renata, sujeito da pesquisa, 2018). Após a resposta da aluna, o sinal indicando o término do horário da aula, soou.

6. Considerações Finais



A aula descrita neste texto foi, como dissemos, a primeira aula elaborada pelos professores do grupo de formação. Por esse motivo, ainda que não fosse possível classificar o grau de dificuldade que apresentaram aos alunos (PONTE, 2003), essas tarefas foram tratadas como sendo de exploração, considerando que ocorreram no início do processo de formação dos professores e eles não possuíam familiaridade com essa abordagem. Considerando a intenção dos professores em propor tarefas que avançassem em relação a proposta do Caderno do Aluno, algumas compreensões relativas ao desenvolvimento de habilidades e aprendizagem de conteúdos foram possíveis.

Durante as explorações com o GeoGebra, o modo como a aula foi organizada, com os alunos dispostos em duplas ou trios, favoreceu o compartilhamento de ideias acerca do que viam na tela do computador. Notou-se um trabalho em colaboração entre os alunos que se mostraram dispostos a fazer as tarefas e ajudar os colegas (PONTE; QUARESMA, 2015). Vê-se isso, por exemplo, na situação vivenciada pelos alunos José e João. Ao compartilhar suas compreensões, os alunos questionaram, expuseram dúvidas, erros e dificuldades sobre a interpretação dos gráficos, o movimento dos controles deslizantes e a forma como deveriam fazer a tarefa (no *software* ou no caderno). O que foi expresso pelos alunos levou o professor a se mobilizar na tentativa de encontrar um modo adequado para orientá-los. Essa atitude do professor favoreceu o diálogo e este possibilitou aos alunos desenvolver habilidades de argumentação e comunicação (PONTE; QUARESMA, 2015) a medida que, ao discutir possibilidades de respostas aos questionamentos do roteiro, refletiam sobre modos de escrever e mesmo de tornar sua questão clara para o professor.

Eles explicitaram sua forma de raciocínio expondo modos diferentes de compreender a exploração com o *software*, de buscar definições e classificar objetos (PONTE; QUARESMA; BRANCO, 2017), bem como de utilizar representações matemáticas (PONTE; QUARESMA, 2015) para responder a um mesmo questionamento, conforme mostra o diálogo entre Ana e Maria.



Consideramos que a experiência vivida com tarefas de exploração no GeoGebra mostrou aspectos positivos desse tipo de trabalho, nos dando uma abertura para que novas tarefas, com novas possibilidades, pudessem ser discutidas. Atribuímos parte desses aspectos positivos ao fato de as tecnologias, como o *software* GeoGebra, permitirem “simular com facilidade, situações complexas que, de outro modo, teríamos dificuldade de estudar (PONTE; QUARESMA; BRANCO, 2017, p. 215).

Referências

BATISTA, Carolina Cordeiro. **O Estudo de Aula na Formação de Professores de Matemática para ensinar com tecnologia**: a percepção dos professores sobre a produção de conhecimento dos alunos. 2017. 109f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2017. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/152467/batista_cc_me_rcla.pdf?sequenc e=3. Acesso em: 1º out. 2019.

CURI, Edda; NASCIMENTO, Julia de Cassia Pereira do; VECE, Janaina Pinheiro. **Grupos Colaborativos e Lesson Study: contribuições para a melhoria do ensino de matemática e desenvolvimento profissional de professores**. São Paulo: Alexa Cultural, 2018. 188 p.

FÉLIX, Thiago Francisco. Metodologia da pesquisa de aula. In: _____. Pesquisando a melhoria de aulas de Matemática seguindo a proposta curricular do Estado de São Paulo, com a metodologia da pesquisa de aulas (lesson study). 2010, f. 12-22. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

LEWIS, Catherine et al. Improving Teaching Does Improve Teachers: Evidence from Lesson Study. *Journal of Teacher Education*. v. 63, n. 5, p. 368-375, 2012. Disponível em: . Acesso em: 11 maio 2016.

MERICHELLI, Marco Aurelio Jarreta; CURI, Edda. REnCiMa - **Edição Especial: Educação Matemática**. v.7 , n.4, p. 15-27, 2016. Disponível em: <<http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1202/838>>. Acesso em: 25 ago. 2019.

PONTE, João Pedro da. Investigar, ensinar e aprender. In: ENCONTRO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (PROFMAT), 2003, Lisboa. Actas do ProfMat... Lisboa: APM, 2003. p. 25-39. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Ponte,%20J.P.%20Investigar,%20Ensinar%20e%200aprender.pdf>>. Acesso em: 20 ago. 2019.



PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa Alexandra Ferreira. As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor. Revista da Faculdade de Educação (Universidade do Estado de Mato Grosso). Cáceres, v. 23, n. 1, p. 131-150, 2015. Disponível em: <http://www2.unemat.br/revistafaed/content/vol/vol_23/artigo_23/131_150.pdf>. Acesso em: 8 ago. 2019.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; BRANCO, Neusa. tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. In: PONTE; J. P. Investigações matemáticas e investigação da prática profissional. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p. 213-252.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações Matemáticas em Sala de Aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

RICHIT, Adriana; PONTE, João Pedro da. A Colaboração Profissional em Estudos de Aula na Perspectiva de Professores Participantes. **BOLEMA**. v. 33, n. 64, p. 937-962, 2019. Disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v33n64/1980-4415-bolema-33-64-0937.pdf>>. Acesso em: 20 ago. 2019.

SÃO PAULO (ESTADO). Material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo – Caderno do Aluno – Matemática, Ensino Médio, 1a série, vol. 1. São Paulo: Secretaria da Educação, 2014.

TAKAHASHI, Akihiko; MCDUGAL, Tom. Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. ZDM - International Journal on Mathematics Education. n. 48, p. 513526, 2016. Disponível em: < <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs11858-0150752-x.pdf> >. Acesso em: 20 ago. 2019.